CERN 60-6

Division du Synchrotron à protons
10 mars 1960

ORGANISATION EUROPÉENNE POUR LA RECHERCHE NUCLÉAIRE
CERN EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH

LES LENTILLES MAGNETIQUES QUADRUPOLAIRES SANS FER :

REALISATION DE REPARTITIONS D'INDUCTION

A GRADIENT CONSTANT.

par Albert SEPTIER

Laboratoire d'Electronique et Radioélectricité
de la Faculté des Sciences de Paris

G E N È V E

CERN 60-6

Division du Synchrotron à protons
10 mars 1960

ORGANISATION EUROPÉENNE POUR LA RECHERCHE NUCLÉAIRE
CERN EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH

LES LENTILLES MAGNETIQUES QUADRUPOLAIRES SANS FER :

REALISATION DE REPARTITIONS D'INDUCTION

A GRADIENT CONSTANT .

par Albert SEPTIER

Laboratoire d'Electronique et Radioélectricité
de la Faculté des Sciences de Paris

G E N È V E

Note

Ce travail est la continuation de celui effectué sur les lentilles quadrupolaires magnétiques qui a fait l'objet du rapport CERN 58-25 de la Division du Synchrotron à protons par P. Grivet et A. Septier.

LES LENTILLES MAGNETIQUES QUADRUPOLAIRES SANS FER :
REALISATION DE REPARTITIONS D'INDUCTION
A GRADIENT CONSTANT .

1. INTRODUCTION

L'obtention de champs magnétiques homogènes ou inhomogènes dont l'intensité dépasse quelques dizaines de milliers d'oersted n'est possible qu'avec des électro-aimants spéciaux consommant des puissances électriques considérables, ou bien avec des bobines sans fer, pour lesquelles le phénomène de saturation d'un matériau ferromagnétique ne joue pas . De nombreuses publications ont décrit la réalisation de champs très intenses à l'aide de solénoïdes ; un synchrotron à protons sans fer est en voie de réalisation, donnant l'exemple de champs inhomogènes intenses dans un volume considérable . L'emploi de bobines sans fer permet en outre une alimentation en impulsions de courant courtes (par suite de la self induction réduite des circuits), mettant en jeu des courants de plusieurs milliers d'ampères, avec une puissance moyenne réduite .

On peut songer à étendre ces avantages aux lentilles à focalisation forte . Dans une lentille quadrupolaire classique l'induction ne peut que difficilement dépasser 10 000 gauss sur le sommet des pôles, par suite de la saturation rapide des supports de pièces polaires . D'autre part, un grand nombre d'accélérateurs de très haute énergie fonctionnent en impulsions, ce qui permet d'envisager une alimentation pulsée des lentilles focalisantes .

D'autre part, vers les très faibles énergies, l'influence du champ rémanent n'est plus négligeable, et perturbe les résultats, en créant un effet d'hystérésis .

Il semble donc utile d'envisager la possibilité de réaliser des lentilles à convergence forte sans fer, c'est-à-dire de manière aussi approchée que possible, des répartitions d'induction magnétique à gradient radial constant autour d'un axe Oz et dans un cylindre utile de rayon R_0 .

Rappelons que, dans une lentille à fer classique, par suite de la largeur finie des pôles, on n'obtient jamais de gradient radial parfaitement constant : sur le cercle de gorge de rayon a , sa décroissance peut atteindre 5 à 10 % pour des pôles larges, 20 à 30 % pour les pôles étroits utilisés aux champs forts⁽¹⁾ .

Les répartitions de champs obtenues dans la suite devront donc être comparées avec celles des lentilles réelles, et non avec la répartition idéale qu'on ne peut pas réaliser en pratique .

Nous n'envisagerons ici que les champs créés par des systèmes de conducteurs à densité de courant uniforme afin de simplifier les problèmes d'alimentation . Après avoir rappelé les expressions du potentiel et des champs dans les systèmes à symétrie quadrupolaire, nous étudierons les approximations de plus en plus approchées obtenues dans un espace de plus en plus grand entourant l'axe, à l'aide de 4 fils, puis de 4 nappes de courant et enfin de 4 bobines épaisses de section rectangulaire, les conducteurs étant supposés indéfinis suivant un axe Oz, ce qui conduit à des répartitions d'induction à deux dimensions seulement .

2. EXPRESSIONS GENERALES DU POTENTIEL ET DES CHAMPS DANS UN SYSTEME A SYMETRIE QUADRUPOLAIRE -

2.1 - Le potentiel scalaire

Considérons un système de quatre électrodes équipotentielles indéfinies parallèles à un axe Oz, portées respectivement aux potentiels (électriques ou magnétiques) $+\Phi_1$ et $-\Phi_1$ (voir figure 1), et possédant :

- quatre plans de symétrie mécanique zOX, zOY, zOx et zOy
- deux plans de symétrie d'excitation zOx et zOy .

Potentiel et champ ne dépendent que des 2 coordonnées . Le potentiel scalaire $\Phi(X, Y)$ obéit à l'équation de Laplace :

$$\Delta^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

et si on pose :

$$W(s) = U(X, Y) + i V(X, Y) \quad (2)$$

avec $s = X + i Y$

on peut l'exprimer sous la forme d'une série infinie :

$$W(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (h_n + i k_n) s^n \quad (3)$$

Par suite des différentes symétries en X et en Y, l'expression W(s) a la forme

$$W(s) = \frac{1}{2} h_2 s^2 + \frac{1}{6} h_6 s^6 + \frac{1}{10} h_{10} s^{10} + \dots \quad (4)$$

d'où l'expression du potentiel

$$\Phi(x, y) = \text{Im } W(s)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & h_2 xy + h_6 xy \left(x^4 - \frac{10}{3} x^2 y^2 + y^4 \right) \\ & + h_{10} xy \left(x^8 - 12 x^6 y^2 + \frac{252}{10} x^4 y^4 - 12 x^2 y^6 + y^8 \right) + \end{aligned} \quad (5)$$

Dans le système d'axes Ox, Oy, à 45° des précédents, on aurait de même

$$\Phi(x, y) = \text{Re } W(s)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{h_2}{2} (x^2 - y^2) + \frac{h_6}{6} [x^6 - 15 x^2 y^2 (x^2 - y^2) - y^6] + \dots \quad (6)$$

2.2 - Les champs, en coordonnées rectangulaires

On peut alors calculer les composantes des champs

$$B_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad B_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

On obtient par exemple en se limitant aux termes du 9ème degré :

$$B_x = - \left[h_2 y + h_6 (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) + h_{10} (9 x^8 y - 84 x^6 y^3 + 126 x^4 y^5 - 36 x^2 y^7 + y^9) \right]$$

Sur OX, on a alors

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= - h_2 x \left(1 + \frac{h_6}{h_2} x^4 + \frac{h_{10}}{h_2} x^8 + \dots \right) \end{aligned} \quad (8)$$

et sur Oy

$$B_x = B_y = - h_2 x \left(1 - \frac{h_6}{h_2} 4 x^4 + \frac{h_{10}}{h_2} 16 x^8 - \dots \right) \quad (9)$$

$$\text{ou : } B_x = - h_2 x \left(1 - \frac{h_6}{h_2} x^4 + \frac{h_{10}}{h_2} x^8 - \dots \right)$$

Les composantes intéressantes du gradient radial du champ sont donc :

$$\text{sur OX : } h_1 = \frac{\partial B_y}{\partial x} = -h_2 \left(1 + 5 \frac{h_6}{h_2} X^4 + 9 \frac{h_{10}}{h_2} X^8 + \dots \right) \quad (10)$$

$$\text{sur OY : } h_2 = \frac{\partial B_x}{\partial y} = -h_2 \left(1 - 5 \frac{h_6}{h_2} x^4 + 9 \frac{h_{10}}{h_2} x^8 - \dots \right)$$

Dans le cas particulier où les sections des électrodes par le plan XOY matérialisent les lignes équipotentielles d'équation

$$\bar{\Phi}_1 = K X Y$$

on obtient une répartition de champ à gradient radial constant que nous appellerons "répartition idéale" .

$$B_Y = -h_2 X \quad \text{sur OX} \quad \text{et} \quad B_X = -h_2 x \quad \text{sur OY}$$

soit en exprimant h_2 à partir de la différence de potentiel $2\bar{\Phi}_1$ existant entre 2 électrodes adjacentes et du rayon a du cercle de gorge tangent aux électrodes

$$B_Y = - \frac{2 \bar{\Phi}_1}{a^2} X \quad \text{et} \quad B_X = - \frac{2 \bar{\Phi}_1}{a^2} x \quad (11)$$

$$\text{Le gradient est alors : } K_X = K_x = K = - 2\bar{\Phi}_1/a^2$$

A partir de ces mêmes grandeurs, on aurait dans le cas général, d'après (8) et (9) :

$$\begin{aligned} B_Y &= - \frac{2 \bar{\Phi}_1}{a^2} X \left(1 + K_6 X^4 + K_{10} X^8 + \dots \right) \\ B_X &= - \frac{2 \bar{\Phi}_1}{a^2} x \left(1 - K_6 x^4 + K_{10} x^8 - \dots \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Avec la correspondance :

$$h_2 = 2\bar{\Phi}_1/a^2 \quad K_6 = h_6/h_2 \quad K_{10} = h_{10}/h_2$$

D'après ces expressions, on voit qu'il est possible de connaître les composantes des champs dans tout l'espace utile (intérieur du cercle de gorge) lorsque les coefficients h_2 , h_6 , h_{10} etc. sont déterminés, et qu'il suffit, pour cette détermination, d'obtenir un développement du type (8) ou (9) dans l'un des plans de symétrie du système envisagé .

2.3 - Expressions en coordonnées polaires

On peut également adopter une autre représentation du potentiel, en coordonnées polaires . L'expression (3) conduit alors à

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} h_n r^n \sin n\theta \quad (13)$$

si on prend l'origine de θ sur OX .

Par suite des différentes symétries

$$\Phi(r, \theta) = \frac{h_2}{2} r^2 \sin 2\theta + \frac{h_6}{6} r^6 \sin 6\theta + \frac{h_{10}}{10} r^{10} \sin 10\theta + \quad (14)$$

et

$$B_r = -h_2 r \left[\sin 2\theta + \frac{h_6}{h_2} r^4 \sin 6\theta + \right] \quad (15)$$

$$B_\theta = -h_2 r \left[\cos 2\theta + \frac{h_6}{h_2} r^4 \cos 6\theta + \right]$$

Les coefficients h_2 et h_6 sont identiques à ceux de (4), et (15) est équivalente à (8) et (9) . Cette représentation a conduit à la mise au point d'une méthode expérimentale de détermination très précise des différents coefficients h_n à l'aide de bobines associées à un flux - mètre sensible⁽²⁾ .

3. INDUCTION PRODUITE PAR QUATRE FILS DISPOSES EN CARRE .

3.1 - Induction

Considérons quatre fils parallèles à Oz situés sur OX et OY à une distance b de 0 (fig.2), et parcourus par des courants de sens opposés : $-I_1$ en A et B , $+I_1$ en C et D , de façon à obtenir des répartitions d'induction semblables à celles de la figure 1 . L'induction B en P (X, Y) est donnée par :

$$B_x = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[\frac{Y}{Y^2 + (X+b)^2} + \frac{Y}{Y^2 + (X-b)^2} - \frac{Y+b}{X^2 + (Y+b)^2} - \frac{Y-b}{X^2 + (Y-b)^2} \right] \quad (16)$$

et une expression identique pour B_y , en échangeant Y et X . Dans les plans de symétrie, les expressions sont très simples :

sur OX $B_X = 0$ (17 a)

$$B_Y = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2} X \left[1 - \left(\frac{X}{b} \right)^4 \right]^{-1}$$

soit $B_Y = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2} X \left(1 + \left(\frac{X}{b} \right)^4 + \left(\frac{X}{b} \right)^8 + \dots \right)$ (17 b)

au voisinage de 0, et la même loi pour B_X sur OY, où B_Y est nul.

Dans les plans Ox et Oy, on a $B_X = B_Y$; le vecteur $\vec{B}$ est dirigé radialement et on a :

$$B_X = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2} X \left[1 + \left(\frac{X}{b} \right)^4 \right]^{-1} \quad (18 a)$$

soit : $B_X = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2} X \left(1 - \left(\frac{X}{b} \right)^4 + \left(\frac{X}{b} \right)^8 - \dots \right)$ (18 b)

près de O.

L'induction B, nulle sur l'axe Oz, ne variera linéairement avec la distance à l'axe que dans une zone peu étendue X, $x \ll b$. Si r désigne la distance OF, la valeur de B oscillera de $\pm 2,5 \%$ autour de la valeur idéale :

$$B_i = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2} r$$

lorsqu'on se déplacera sur un cercle de rayon $r_1 = b/5$, et de $\pm 6,25 \%$ pour $r_2 = b/4$.

3.2 - Gradient radial

Sur l'axe on aurait : $K(0) = - \frac{2 \mu_0 I_1}{\pi b^2}$ (19)

et en posant : $u = X/b$ et $v = x/b$, on obtient sur OX et Ox, respectivement :

$$K(X) = K(0) \frac{1 + 3u^4}{(1 - u^4)^2} \quad (20 a)$$

$$K(x) = K(0) \frac{1 - 3v^4}{(1 + v^4)^2}$$

ce qui conduit à des développements de la forme :

$$\begin{aligned} K(X) &= K(0) \left(1 + 5u^4 + 9u^8 + \dots \right) \\ K(x) &= K(0) \left(1 - 5v^4 + 9v^8 - \dots \right) \end{aligned} \quad (20) \text{ b}$$

conformément aux prévisions du paragraphe 2 .

Une lentille quadrupolaire formée de quatre fils ne pourrait donc être utilisée que comme système correcteur pour un faisceau circulant au voisinage de Oz ($\frac{r}{b} \ll 0,2$) , car le gradient varie très vite lorsqu'on s'en éloigne (fig.3) : $K/K(0)$ croît sur OX et décroît sur Ox ; ce rapport atteint 2 en $u \simeq 0,55$ et s'annule pour $v \simeq 0,75$. Une lentille de ce type est utilisée sur le trajet d'injection du faisceau de protons de 3,6 MeV du cosmotron de Brookhaven⁽³⁾ .

IV - INDUCTION PRODUITE PAR QUATRE NAPPES DE COURANT DISPOSEES EN CARRE ET DE LARGEUR EGALE AU COTE DU CARRE.

4.1 - Induction

La figure 4 montre la disposition des quatre nappes d'épaisseur e négligeable devant b . Si j désigne la densité de courant dans le conducteur, on aurait :

$$I_2 = 2 b e j$$

On suppose que les courants sont égaux à :

$$\begin{aligned} &+ I_2 \text{ dans } A_1 A_2 \text{ et } A_3 A_4 \\ &- I_2 \text{ dans } A_1 A_4 \text{ et } A_2 A_3 \end{aligned}$$

Il nous suffit de calculer B_X et B_Y sur les axes de symétrie, OX et Ox par exemple .

En posant $X/b = u$ et $x/b = v$, on aurait (voir appendice II) :

$$\begin{aligned} &B_X = 0 \\ \text{sur OX} \quad B_Y &= -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi b} \left[\text{Arg th} \frac{2u}{2+u^2} + \text{Arc tg} \frac{2u}{2-u^2} \right] \end{aligned} \quad (21) \text{ a}$$

$$\text{et sur Ox} \quad B_X = B_Y = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi b} \left[\text{Arg th} u + \text{Arc tg} u \right] \quad (21) \text{ b}$$

d'où au voisinage de l'axe

$$B_y = - \frac{\mu_0 I_2}{\pi b} u \left(1 - \frac{1}{20} u^4 + \frac{1}{144} u^8 - \dots \right) \quad (22) a$$

$$B_x = - \frac{\mu_0 I_2}{\pi b} v \left(1 + \frac{1}{20} v^4 + \frac{1}{144} v^8 + \dots \right) \quad (22) b$$

Les coefficients K_6 et K_{10} seraient égaux à $1/20$ et $1/144$.

Les courbes de la figure 5 donnent les variations du rapport B/B_{th} , obtenues à partir des formules générales (21), de $r/b = 0$ à $r/b = 1$; B_{th} désigne la valeur idéale :

$$B_{th} = - \frac{\mu_0 I_2}{\pi b} \frac{r}{b} = K(0) \cdot r$$

On y a également porté les courbes obtenues avec les développements limités : on voit que 3 termes suffisent pour représenter les variations réelles à 10^{-3} près.

La valeur de l'induction augmente suivant Ox, et décroît sur OX, contrairement au phénomène observé dans le cas des quatre fils : on peut chercher à compenser en partie ces variations en superposant les deux systèmes de courants.

4.2 - Gradient radial

On tire des expressions (21) :

$$K(X) = K(0) \left(1 + \frac{u^4}{4} \right)^{-1}$$

et

$$K(x) = K(0) \left(1 - \frac{v^4}{4} \right)^{-1}$$

avec

$$K(0) = - \frac{\mu_0 I_2}{\pi b^2} = - \frac{2 \mu_0 j}{\pi} \frac{e}{b} \quad (24)$$

Les fonctions $K(X)/K(0)$ et $K(x)/K(0)$, qui constituent le "gradient réduit" sont représentées sur la figure 6, en utilisant les formules (23) et les développements à trois termes du type :

$$K(X) = K(0) \left(1 - \frac{1}{5} u^4 + \frac{1}{16} u^8 - \dots \right)$$

Cette approximation est encore suffisante.

Jusqu'en $u = v = 0,75$ le gradient réel ne diffère pas de plus de $\pm 6\%$ du gradient $K(0)$ et pour $u = v = 1$, les écarts sont respectivement sur Ox et Oy de -25 et $+33\%$, ce qui se traduit pour B par des écarts de $\pm 6\%$ entre B réel et B idéal.

4.3 - Comparaison avec la lentille quadrupolaire classique de même excitation.

Le gradient $K(0)$ sur Oz est donné par (24) ; la répartition spatiale de l'induction est la même que celle d'une lentille quadrupolaire classique dont les pôles auraient leurs sommets aux quatre coins du carré (figure 7), et telle que la différence de potentiel magnétique entre deux pôles adjacents soit précisément :

$$2 \Phi_1 = \mu_0 I_2$$

soit, pour chaque pôle : $\Phi_1 = \frac{1}{2} \mu_0 I_2$

La lentille à pôles, dont le cercle de gorge aurait un rayon $h = b\sqrt{2}$ produirait un gradient égal à :

$$K(0)_{\text{fer}} = - \frac{\mu_0 I_2}{h^2} = - \frac{\mu_0 I_2}{2b^2}$$

La lentille sans fer fournit donc un gradient plus faible :

$$\frac{K(0)_{\text{fer}}}{K(0)_{\text{air}}} = \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

4.4 - Superposition de couches minces : bobines trapézoïdales

On peut obtenir des gradients élevés en juxtaposant de nombreuses nappes de courants : si celles-ci sont disposées en carré il y a superposition linéaire des distributions précédentes (fig.8).

Soit e l'épaisseur d'une couche (avec $e \ll b$) et j la densité de courant. Le gradient au centre, fourni par la $n^{\text{ième}}$ couche est donné par :

$$K(0)_n = - \frac{2\mu_0 j}{\pi} \frac{e}{b_n} = - \frac{2\mu_0 j}{\pi} \frac{e}{b_0 \left(1 + \frac{ne}{b_0}\right)}$$

$$K(0)_n = \frac{K(0)_0}{1 + ns} \quad (26)$$

en posant $s = e/b_0$.

D'où le gradient total au centre :

$$\frac{K(0)_{\text{total}}}{K(0)_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+ns} \quad (27)$$

On pourrait aussi obtenir $K(0)_{\text{total}}$, en calculant tout d'abord l'induction créée par une bobine trapézoïdale par la méthode employée pour les bobines rectangulaires (voir Appendice I), mais les formules résultantes sont trop peu maniables.

La courbe correspondante est représentée figure 9, pour $s = 0,05$ (courbe 1), jusqu'à $n = 19$ (soit 20 couches, correspondant à des bobines d'épaisseur b). Lorsque le gradient s'accroît, ses variations dans l'espace utile diminuent. On a en effet sur OX :

$$K(X)_n = \frac{K(0)_0}{(1+ns) \left(1 + \frac{u^2}{4} \frac{1}{(1+ns)^4} \right)} \quad (28)$$

$$\text{et } K(X)_{\text{total}} = \sum_0^n K(X)_n$$

Le rapport $K(X)_{\text{total}}/K(0)_{\text{total}}$, est porté sur la figure 10 pour différentes valeurs de l'épaisseur des bobines : $2a = ne$. Les courbes sont désignées par les valeurs de $\alpha = a/b_0$, pour $\alpha = 0$, 0,25 et 0,5. Dans ce dernier cas (bobines de 20 couches) le gradient total au centre est égal à

$$K(0)_{\text{total}} = 14,11 K(0)_0$$

et les variations de $K(X)$ sont au maximum de 8 % en $X = b$, au lieu de 20 % avec une couche unique : l'accroissement du gradient s'accompagne d'une linéarité accrue des variations de l'induction (les écarts $\Delta B/B_{th}$ ne dépassent pas 1,6 % en $X = b$).

5. INDUCTION CREEE PAR QUATRE NAPPES MINCES DE LARGEUR 2ℓ INFERIEURE A $2b$

5.1 - Induction sur OX

Avec la disposition de la figure 11, et des courants $\pm I$ dans les nappes, l'induction sur OX est donnée par :

$$B_y = - \frac{\mu_0 I}{2\pi \ell} \left[\text{Arg th } \frac{2\ell x}{d^2 + x^2} + \text{Arc tg } \frac{2\ell x}{d^2 - x^2} \right] \quad (29)$$

avec $d^2 = b^2 + \ell^2$.

Si on pose $\ell/b = t$, et $X/b = u$, on obtient, avec $j = I/2\ell$:

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\ell} \left[\text{Arg th} \frac{2ut}{(1+t^2)(1+\frac{u^2}{1+t^2})} + \text{Arc tg} \frac{2ut}{(1+t^2)(1-\frac{u^2}{1+t^2})} \right] \quad (30)$$

et on peut en calculer les valeurs pour chaque valeur de u lorsque t est fixé.

Au voisinage de 0, on aurait :

$$B_y = -\frac{2\mu_0 I}{\pi b(1+t^2)} u \left[1 - \frac{10t^2 - t^4 - 5}{5(1+t^2)^4} u^4 + \frac{9 - 84t^2 + 126t^4 - 36t^6 + t^8}{9(1+t^2)^8} u^8 \right] \quad (31)$$

5.2 - Gradient : choix de la valeur optimum de ℓ

Le gradient $K(X)$ sur OX s'exprime par :

$$K(x) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi b^2(1+t^2)} \cdot \frac{1 + \frac{3-t^2}{(1+t^2)^3} u^4}{1 + \frac{2(6t^2 - t^4 - 1)u^4 + u^8}{(1+t^2)^4}} \quad (32)$$

On a donc :

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi b^2(1+t^2)} \quad (33)$$

Les courbes représentant les variations de $K(X)/K(0)$ sur OX pour différentes valeurs de t , sont portées sur la figure 12 ; la valeur $t = 0,7265$ annule le terme en u^4 du gradient développé sous la forme

$$K(X) = K(0) \left(1 - 5A_4 u^4 + 9A_8 u^8 \right)$$

Pour $t = 1$, on retrouve la courbe de la figure 6 ; pour $t = 0$, on a le cas des quatre fils. Enfin pour $t = 0,685$ le gradient varie de 2 % de $u = 0$ à $u = 0,9$. Les variations sur Ox sont du même ordre, mais de sens contraire. Il est donc possible, avec quatre couches minces de largeur inférieure au côté b du carré sur lesquelles elles sont fixées, d'obtenir des répartitions d'induction à gradient quasi-constant.

La décroissance du gradient $K(0)$ avec t , lorsque la densité de courant j reste constante dans la couche, est donnée figure 13. Pour accroître $K(0)$, on pourrait multiplier les couches en gardant par exemple $t_n = l_n/b_n$ égal à t_0 , ce qui entraînerait encore un "adoucissement" des variations de $K(X)$. Nous avons préféré atténuer ces variations en utilisant des bobinages de sections rectangulaires pour lesquelles les expressions de B et de $K(X)$ sont plus simples.

6. INDUCTION CREEE PAR QUATRE BOBINAGES DE SECTION RECTANGULAIRE ET A DENSITE DE COURANT CONSTANTE, DISPOSES EN CARRE.

6.1 - Induction

On choisit tout d'abord des bobines de section $2a \times 2b$, disposées comme l'indique la figure 14. Les bobines (1) et (2) transportent un courant total $+I = 4 abj$, et les deux autres, un courant $-I$. Soit O_1 le centre de la bobine (1). On pose $OO_1 = h$, $h+a = \beta$, $h-a = \gamma$ et $\lambda = \mu_0 I / 8\pi ab$. En un point P de OX , on obtient (voir Appendice II) :

$$\begin{aligned} \frac{B_y}{\lambda} = & \gamma \log \frac{(X+\beta)^2 + \gamma^2}{(X-\beta)^2 + \gamma^2} - \beta \log \frac{(X+\gamma)^2 + \beta^2}{(X-\gamma)^2 + \beta^2} \\ & + 2\beta \left[\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\beta} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\beta} \right] - 2\gamma \left[\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\gamma} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\gamma} \right] \\ & + 2X \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\gamma} \right) \right] \quad (34a) \end{aligned}$$

Au voisinage de O , on peut développer B_y :

$$\begin{aligned} B_y = & -\frac{\mu_0 I}{2\pi a(h-a)} \cdot \operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2-a^2} \times \left[1 - \frac{1}{10} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^4} \frac{X^4}{\operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2-a^2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{720} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^8} \cdot \frac{a^4+h^4-6a^2h^2}{\operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2-a^2}} X^6 - \right] \quad (34b) \end{aligned}$$

6.2 - Gradient $K(X)$

Par dérivation, on obtient pour $K(X)$ une expression relativement simple, formée seulement par le coefficient du terme en X de (34) :

$$\frac{K(X)}{\lambda} = 2 \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{1+\beta}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{1-\beta}{\beta} \right) \right] \quad (35)$$

ou en fonction de j , du rapport $\alpha = a/b$ et de $u = X/b$

$$h(X) = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \left[\operatorname{Arctg} \frac{4\alpha(1+\alpha)-u^2}{2(1+2\alpha)} + \operatorname{Arctg} \frac{4\alpha(1+\alpha)+u^2}{2(1+2\alpha)} \right] \quad (36)$$

En $u = 0$ on aurait :

$$K(0) = -\frac{\mu_0 j}{2\pi ab} \operatorname{Arctg} \frac{2ab}{b^2 - a^2} \quad (37 a)$$

$$\text{ou } h(0) = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{2\alpha(1+\alpha)}{1+2\alpha} \quad (37 b)$$

Les courbes donnant $K(X)/K(0)$ pour différentes valeurs de sont portées sur la figure 15, pour $0 < \alpha < 1$.

Si $\alpha = 0,5$ (bobines d'épaisseur $2a \approx b$), l'écart $\frac{K(b)-K(0)}{K(0)}$ est de l'ordre de 3 %. Si $\alpha = 1$, l'écart atteint seulement 0,5 %. Il y aura donc un gros avantage à utiliser des bobinages épais, de forme rectangulaire plutôt que trapézoïdale (comparer à la figure 10). Les courbes ainsi obtenues montrent qu'on peut comparer avantageusement ces répartitions d'induction avec celles qu'on obtient effectivement avec les lentilles quadrupolaires classiques.

Lorsque α croît, j restant constant, $K(0)$ croît selon la loi représentée par la courbe (2) de la figure 9. On voit que pour une même épaisseur des bobines, l'écart est faible entre les courbes (1) (bobines trapézoïdales) et (2) (bobines rectangulaires), bien que le courant total soit bien plus important dans le premier cas ($I_1/I_2 = 1 + \alpha$).

Notons enfin que les courbes donnant B_Y ou $K(X)$ sont obtenues à mieux que 10^{-3} près en utilisant les développements limités au deuxième terme (en x^4 ou X^4).

6.3 - Comparaison avec une lentille à fer sans pôles

HAND et PANOFISKY ont proposé récemment⁽⁴⁾ la construction de lentilles à fer sans pôles, composées de bobines du type précédent placées dans une carcasse d'acier doux. On ne connaît de ces lentilles que l'expression du terme fondamental du gradient⁽⁴⁾⁽⁵⁾ qui s'écrit, dans le cas d'une lentille à ouverture carrée de côté $2b$, avec des bobines d'épaisseur $2a$:

$$K(0)_{\text{fer}} = \frac{\mu_0 I}{2(\ell^2 - a^2)} \quad (38)$$

au lieu de

$$K(0)_{\text{air}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a(\ell - a)} \operatorname{Arctg} \frac{2ah}{\ell^2 - a^2} \quad (39)$$

D'où, pour une même intensité I un rapport

$$\frac{K(0)_{\text{fer}}}{K(0)_{\text{air}}} = \frac{\pi a}{(\ell + a) \operatorname{Arctg} \frac{2ah}{\ell^2 - a^2}} \quad (40)$$

Ce rapport égal à $\pi/2$ si $a = 0$, n'est plus que de 1,23 environ si $b = 2a$, et tend vers 1 si a devient très grand.

7. BOBINES RECTANGULAIRES DE LARGEUR INFÉRIEURE AU CÔTÉ DU CARRE.

Par analogie avec le cas des couches minces, ici encore on peut espérer réduire les variations de $K(X)$ en agissant sur le rapport $t = \ell/b$.

7.1 - Induction et gradient sur OX

La section des bobines est maintenant $2 \times 2a$ (figure 16) et j reste constant. En posant :

$$\lambda = \frac{\mu_0 j}{2\pi} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a \ell} \quad ; \quad h+a = \beta \quad \text{et} \quad h-a = \gamma$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{B_y}{\lambda} = & \ell \left[\operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2 + \ell^2}{(X-\beta)^2 + \ell^2} - \operatorname{Log} \frac{(X+\gamma)^2 + \ell^2}{(X-\gamma)^2 + \ell^2} \right] + \gamma \operatorname{Log} \frac{(X+\ell)^2 + \gamma^2}{(X-\ell)^2 + \gamma^2} - \beta \operatorname{Log} \frac{(X+\ell)^2 + \beta^2}{(X-\ell)^2 + \beta^2} \\
 & + 2\gamma \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\ell} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\ell} \right) - 2\beta \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\ell} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\ell} \right) \\
 & + 2\ell \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\ell}{\beta} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\ell}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\ell}{\gamma} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\ell}{\gamma} \right) \right] \\
 & + 2X \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\ell} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\ell} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\ell} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\ell} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\ell}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\ell}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\ell}{\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\ell}{\gamma} \right) \right] \quad (41)
 \end{aligned}$$

L'expression de $K(X)$ est encore relativement simple ; ici encore elle est constituée uniquement par le coefficient du terme en X .

Posons $\ell/b = t$ $\beta/\gamma = v = 1+2\alpha$ et $X/b = u$

On obtient :

$$\frac{K(u)}{2\lambda} = \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{1-t^2+u^2}{2t} + \operatorname{Arctg} \frac{1-t^2-u^2}{2t} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{v^2-t^2+u^2}{2vt} + \operatorname{Arctg} \frac{v^2-t^2-u^2}{2vt} \right) \right] \quad (42)$$

$$K(u) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \ell} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1-t^2}{2t} - \operatorname{Arctg} \frac{v^2-t^2}{2vt} \right) \quad (43)$$

7.2 - Résultats

Nous avons calculé $K(u)$ pour deux valeurs de v correspondant à $\alpha = 0,25$ et $\alpha = 0,5$ et pour quelques valeurs de t . La figure 17 donne les courbes ainsi obtenues. Comme pour les couches minces, il y a relèvement du gradient en $X = b$ lorsque t décroît. Dans le cas de bobines épaisses ($\alpha = 0,5$ soit $b = 2a$), on peut obtenir pour $t = 0,92$ un gradient constant à mieux que $3 \cdot 10^{-3}$ près, de $u = 0$

à $u=1$, et l'écart ne dépasse pas 10^{-4} jusqu'en $u=0,9$ (soit 1.10^{-5} entre l'induction E_y et l'induction idéale $B_i = K(0)X$). Pour des bobines minces ($a/b = 0,25$ par exemple) l'écart serait plus grand.

Lorsque ℓ décroît, le gradient $K(0)$ varie selon la loi de la figure 18 sur laquelle on a représenté, pour $\alpha = 0,5$ la courbe $K(0)_t/K(0)_1$.

Si $t = 1$, on a

$$K(1) = \frac{2 \mu_0 I}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{3}{4} = \frac{1,287 \mu_0 I}{\pi}$$

et pour $t = 0,92$

$$K(0) = \frac{1,25 \mu_0 I}{\pi}$$

c'est-à-dire une réduction de 3 % environ, alors que la section des bobines et par conséquent I , a subi une réduction de 8 %.

7. CONCLUSION

Des répartitions d'inductions à gradient constant peuvent être obtenues avec une bonne approximation, grâce à des bobinages sans fer, à densité constante, placés sur les côtés d'un carré.

- soit des nappes minces de courant de largeur 2ℓ inférieure au côté $2b$ du carré,
- soit des bobines rectangulaires de largeur $2b$ et d'épaisseur $2a$, ou mieux, de largeur 2ℓ légèrement inférieure à $2b$.

On peut donc envisager la construction de lentilles quadrupolaires sans fer ayant des aberrations équivalentes ou inférieures à celles des lentilles à fer classiques. Cette aberration d'ouverture peut s'annuler lorsque le gradient croît selon OX et décroît sur $Cx(1)$: les lentilles à bobines rectangulaires pourront donc être corrigées, par un choix approprié du rapport $\alpha = a/b$.

Pour un même courant total I dans chaque bobine, le gradient est inférieur à celui d'une lentille à fer classique, mais on pourra utiliser avantageusement ces lentilles sans fer dans deux domaines.

- celui des champs faibles, où on évitera les phénomènes parasites dus au champ rémanent,
- celui des champs très forts, en impulsions ou en continu, évitant ainsi la limitation due à la saturation du fer des carcasses magnétiques.

Tous les calculs ont été effectués pour des nappes ou bobines indéfinies suivant Oz . Comme dans toutes les lentilles réelles, les champs de fuites d'extrémité joueront un rôle important, tout au moins pour des lentilles courtes, mais les répartitions d'induction dans ces champs de fuite ne sont pas calculables . Seules des mesures permettront d'en tracer la carte, et de déterminer les aberrations de ces lentilles , en les comparant à celles des lentilles quadrupolaires classiques .

-:-:-:-:-

le 3 février 1960

A.bert SEPTIER

APPENDICE I

Expression de l'induction créée par un fil, une nappe mince et une barre rectangulaire .

1. FIL

Soit un conducteur indéfini parallèle à Oz de section $ds = d\xi d\eta$ (figure 19) situé en un point M de coordonnées ξ et η et transportant un courant +I . En un point P (x,y) l'induction $\vec{dB}$ est telle que

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{MP} \quad \text{avec } I = j \cdot d\xi \cdot d\eta$$

j est la densité de courant .

En projetant sur les direction Ox et Oy on obtient :

$$\begin{aligned} dB_x &= - \frac{\mu_0 j}{2\pi} \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ dB_y &= + \frac{\mu_0 j}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (45)$$

2. BANDE MINCE

On considère une bande mince d'épaisseur $d\xi$ située en $x = \xi$, parallèle à Oz et s'étendant de $y = b$ à $y = +b$ (figure 20) .

L'induction $\vec{\Delta B}$ créée en P par cette bande s'obtient en intégrant les expressions (45) .

On pose : $x-\xi = a$; $y-\eta = u$; $\lambda = \mu_0 j / 2\pi$

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta B_x &= + \lambda d\xi \int_{y+b}^{y-b} \frac{u}{a^2 + u^2} du \\ \Delta B_y &= - \lambda d\xi \int_{y+b}^{y-b} \frac{a}{a^2 + u^2} du \end{aligned}$$

$$\Delta B_x = \frac{\lambda}{2} d\zeta \operatorname{Log} \frac{(x-\zeta)^2 + (y-b)^2}{(x-\zeta)^2 + (y+b)^2} \quad (46 a)$$

$$\Delta B_y = - \lambda d\zeta \left(\operatorname{Arc tg} \frac{x-\zeta}{y+b} - \operatorname{Arc tg} \frac{x-\zeta}{y-b} \right)$$

On peut exprimer aussi ΔB_x et ΔB_y en fonction de l'intensité totale $I = 2bjd\zeta$, des distances R_1 R_2 et des angles α_1 et α_2 (avec les sens indiqués sur la figure 20)

$$\begin{aligned} \Delta B_x &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1} \\ \Delta B_y &= + \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (46 b)$$

3. BARRE RECTANGULAIRE

Soit une barre de section $2a \times 2b$, centrée en O, et transportant un courant +I de densité $j = I/4ab$

$$B_x = - \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^{+a} \operatorname{Log} \frac{(x-\zeta)^2 + (y+b)^2}{(x-\zeta)^2 + (y-b)^2} d\zeta$$

$$B_y = - \lambda \int_{-a}^{+a} \left(\operatorname{Arc tg} \frac{x-\zeta}{y+b} - \operatorname{Arc tg} \frac{x-\zeta}{y-b} \right) d\zeta$$

On pose :

$$x-\zeta = v \quad y+b = \alpha_1 \quad \text{et} \quad y-b = \alpha_2$$

$$B_x = + \frac{\lambda}{2} \int_{x+a}^{x-a} \left(\text{Log}(v^2 + \alpha_1^2) - \text{Log}(v^2 + \alpha_2^2) \right) dv$$

$$B_y = \lambda \int_{x+a}^{x-a} \left(\text{Arctg} \frac{v}{\alpha_1} - \text{Arctg} \frac{v}{\alpha_2} \right) dv$$

On utilise les relations

$$\int \text{Log}(v^2 + \alpha^2) dv = v \text{Log}(v^2 + \alpha^2) - 2v + 2\alpha \text{Arctg} \frac{v}{\alpha}$$

$$\text{et } \int \text{Arctg} \frac{v}{\alpha} dv = v \text{Arctg} \frac{v}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \text{Log}(v^2 + \alpha^2)$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{B_x}{\lambda} &= \frac{x+a}{2} \text{Log} \frac{(x+a)^2 + (y-b)^2}{(x+a)^2 + (y+b)^2} + \frac{x-a}{2} \text{Log} \frac{(x-a)^2 + (y+b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &+ (y+b) \left(\text{Arctg} \frac{y+b}{x+a} - \text{Arctg} \frac{y+b}{x-a} \right) + (y-b) \left(\text{Arctg} \frac{y-b}{x-a} - \text{Arctg} \frac{y-b}{x+a} \right) \end{aligned}$$

(49)

$$\begin{aligned} \frac{B_y}{\lambda} &= \frac{y+b}{2} \text{Log} \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2} + \frac{y-b}{2} \text{Log} \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x+a)^2 + (y-b)^2} \\ &+ (x+a) \left(\text{Arctg} \frac{x+a}{y-b} - \text{Arctg} \frac{x+a}{y+b} \right) + (x-a) \left(\text{Arctg} \frac{x-a}{y+b} - \text{Arctg} \frac{x-a}{y-b} \right) \end{aligned}$$

ou sous une autre forme, en utilisant les notations de la figure (21 b) :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \left[(x+a) \operatorname{Log} \frac{R_2}{R_3} + (x-a) \operatorname{Log} \frac{R_4}{R_1} + \right. \\ \left. + (y+b)(\alpha_3 - \alpha_4) + (y-b)(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \quad (50)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{8\pi ab} \left[(y+b) \operatorname{Log} \frac{R_3}{R_4} + (y-b) \operatorname{Log} \frac{R_1}{R_2} + \right. \\ \left. + (x+a)(\alpha_3 - \alpha_2) + (x-a)(\alpha_1 - \alpha_4) \right]$$

APPENDICE II

ASSOCIATION DE QUATRE NAPPES OU BOBINES

1. ASSOCIATION DE 4 NAPPES MINCES

1.1 - Expression de B en un point quelconque

Il suffit d'écrire les expressions de B_x et B_y pour chaque nappe dans le nouveau système de coordonnées CX et OY, et de faire la somme, pour les quatre couches, des composantes correspondantes. La largeur des nappes, 2ℓ , est inférieure à b (fig. 22).

On a en P :

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell} \left[\log \frac{PD}{PC} \frac{PG}{PH} + (\beta_1 - \beta_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \right] \\ B_y &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell} \left[\log \frac{PB}{PA} \frac{PE}{PF} + (\beta_4 - \beta_2) + (\alpha_2 - \alpha_4) \right] \end{aligned} \quad (51)$$

1.2 - Valeur de B sur les axes

Sur OX, on obtient, par raison de symétrie :

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell} \left(\log \frac{PB^2}{PA^2} + 2(\beta_4 - \beta_2) \right)$$

soit :

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell} \left[\log \frac{b^2 + (x+\ell)^2}{b^2 + (x-\ell)^2} + 2 \left(\operatorname{Arctg} \frac{\ell}{b-x} - \operatorname{Arctg} \frac{\ell}{b+x} \right) \right]$$

$$\text{ou : } B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell} \left[\log \frac{1 + \frac{2\ell x}{x^2 + b^2 + \ell^2}}{1 - \frac{2\ell x}{x^2 + b^2 + \ell^2}} + 2 \operatorname{Arctg} \frac{2\ell x}{\ell^2 + b^2 - x^2} \right] \quad (52)$$

et en utilisant la relation : $\text{Log} \frac{1+x}{1-x} = 2 \text{Arg th } x$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \ell} \cdot \left[\text{Arg th} \frac{2\ell X}{b^2 + \ell^2 + X^2} + \text{Arctg} \frac{2\ell X}{b^2 + \ell^2 - X^2} \right] \quad (53)$$

Pour obtenir un développement limité au voisinage de O, il est commode de poser $\ell/b = t$ et $X/b = u$. On obtient alors

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \ell} \left[\text{Arg th} \left\{ \frac{2t}{1+t^2} u \left(1 + \frac{u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} + \text{Arctg} \left\{ \frac{2t}{1+t^2} u \left(1 - \frac{u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} \right] \quad (54)$$

En utilisant les relations :

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\text{Arg th } y = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots$$

$$\text{Arctg } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

On peut développer jusqu'au terme en u^9 . Conformément aux résultats généraux du paragraphe 1, seuls subsistent les termes en u , u^5 et u^9 , et on a l'expression :

$$B_y = -\frac{2\mu_0 I}{\pi b (1+t^2)} u \left[1 - \frac{10t^2 - t^4 - 5}{5(1+t^2)^4} u^4 + \frac{9 - 84t^2 + 12t^4 - 36t^6 + t^8}{9(1+t^2)^8} u^8 \right] \quad (55)$$

soit :

$$B_y = -K(0) X (1 - A_4 u^4 + A_8 u^8)$$

Sur Ox, les formules sont plus compliquées.

On obtient :

$$B_X = B_Y \quad \text{et} \quad B_x = B_Y \sqrt{2}$$

$$B_Y = - \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{PD \cdot PG}{PC \cdot PH} \right)^2 + (\beta_1 - \beta_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) \right] \quad (56)$$

soit, avec les mêmes notations que précédemment :

$$B_Y = - \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[\operatorname{Arg} \operatorname{th} \left\{ \frac{2u(1+t)}{1+t^2} \cdot \left(1 + \frac{2u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} + \operatorname{Arctg} \left\{ \frac{2u(1+t)}{1+t^2} \cdot \left(1 - \frac{2u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} \right. \\ \left. - \operatorname{Arg} \operatorname{th} \left\{ \frac{2u(1-t)}{1+t^2} \cdot \left(1 + \frac{2u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} - \operatorname{Arctg} \left\{ \frac{2u(1-t)}{1+t^2} \cdot \left(1 - \frac{2u^2}{1+t^2} \right)^{-1} \right\} \right] \quad (57)$$

Après des calculs fastidieux, on retrouve bien

$$B_x = - K(0) x \left(1 + A_4 v^4 + A_8 v^8 \right) \quad \text{avec} \quad v = x/b$$

$$\text{et} \quad K(0) = \frac{2 \mu_0 I}{\pi b^2 (1+t^2)} \quad (58)$$

1.3 - Gradient

Le gradient sur OX est obtenu par dérivation de (54) :

$$K(x) = - K(0) \frac{1 + \frac{3-t^2}{(1+t^2)^3} u^4}{1 + \frac{2u^4(6t^2-t^4-1)+u^8}{(1+t^2)^4}}$$

Le développement de cette expression donne :

$$K(x) = - K(0) \left(1 - 5 A_4 u^4 + 9 A_8 u^8 - \dots \right)$$

1.4 - Cas particulier, $t = 1$

Il est évidemment plus simple de calculer B et K directement mais on peut les tirer des expressions générales .

Sur OX :

$$B_y = - \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \left[\operatorname{Arg} \operatorname{th} \frac{2u}{2+u^2} + \operatorname{Arctg} \frac{2u}{2-u^2} \right] \quad (60)$$

$$K(\lambda) = -K(0) \left(1 + \frac{u^2}{4}\right)^{-1} \quad (61)$$

Sur Ox :

$$B_y = - \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[\operatorname{Arg} \operatorname{th} \frac{2u}{1+u^2} + \operatorname{Arctg} \frac{2u}{1-u^2} \right] \quad (62)$$

ou

$$B_y = - \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \left[\operatorname{Arg} \operatorname{th} u + \operatorname{Arctg} u \right] \quad (63)$$

$$K(\lambda) = -K(0) (1 - u^4)^{-1} = -K(0) \left(1 - \frac{v^4}{4}\right)^{-1} \quad (64)$$

en posant

$$v = \frac{x}{b}$$

et

$$K(0) = \frac{\mu_0 I}{\pi b^2} \quad (65)$$

2. ASSOCIATION DE 4 BOBINES RECTANGULAIRES DE LARGEUR
EGALE AU COTE DU CARRE .

Par suite de la complication des expressions donnant B_X et B_Y en un point quelconque, nous ne les donnerons que sur OX et Ox .

2.1 - Induction et gradient sur OX (fig.14)

On a $OO_1 = h$. Les bobines (1) et (2) transportent le courant $+I$ et les bobines (3) et (4) le courant $-I$. On pose $h+a = \beta$, $h-a = \gamma$
et $\lambda = \mu_0 I / 8\pi ab = \mu_0 j / 2\pi$.

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{By}{\lambda} = & \gamma \operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2 + \gamma^2}{(X-\beta)^2 + \gamma^2} - \beta \operatorname{Log} \frac{(X+\gamma)^2 + \beta^2}{(X-\gamma)^2 + \beta^2} \\ & + 2\gamma \left[\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\beta} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\beta} \right] - 2\beta \left[\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\gamma} + \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\gamma} \right] \\ & + 2X \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\gamma} \right) \right] \quad (66) \end{aligned}$$

Pour effectuer le développement de cette expression au voisinage de 0, il est commode de poser

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad \frac{X^2}{\alpha^2} = u^2$$

Les 4 premiers termes de (66) peuvent alors être mis sous la forme

$$\begin{aligned} F_1(X) = & 2\gamma \operatorname{Argth} \left(\frac{2\beta}{\alpha} u \cdot (1+u^2)^{-1} \right) - 2\beta \operatorname{Argth} \left(\frac{2\gamma}{\alpha} u \cdot (1+u^2)^{-1} \right) \\ & + 2\gamma \operatorname{Arc tg} \left(\frac{2\beta}{\alpha} u \cdot (1-u^2)^{-1} \right) - 2\beta \operatorname{Arc tg} \left(\frac{2\gamma}{\alpha} u \cdot (1-u^2)^{-1} \right) \quad (67a) \end{aligned}$$

Le développement de ces termes s'écrit, après retour aux grandeurs a , h et X :

$$F_1(X) = -\frac{8}{5} \cdot \frac{ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^4} X^5 + \frac{4}{9} \frac{ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^8} (h^4 - 6h^2a^2 + a^4) X^9 \dots \quad (67b)$$

Le terme en X de (66) est de la forme

$$F_2(X) = 2X \left[\operatorname{Arctg} \frac{2\beta\gamma}{\beta^2 - \gamma^2 + X^2} - \operatorname{Arctg} \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2 + X^2} \right] \quad (68a)$$

$$F_2(X) = -2X \left[\operatorname{Arctg} \left\{ \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma} \left(1 - \frac{X^2}{\beta^2 - \gamma^2} \right) \right\} + \operatorname{Arctg} \left\{ \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma} \left(1 + \frac{X^2}{\beta^2 - \gamma^2} \right) \right\} \right] \quad (68b)$$

ou en posant :

$$\frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma} = k^2, \quad \frac{X^2}{\beta^2 - \gamma^2} = v^2$$

$$F_2(X) = -2X \left[\operatorname{Arctg} k^2(1-v^2) + \operatorname{Arctg} k^2(1+v^2) \right] = -2X (A_1(v) + A_2(v)) \quad (68c)$$

Après dérivation de $A_1(v)$ et $A_2(v)$, développement des expressions obtenues puis intégration et retour aux grandeurs initiales, on obtient :

$$F_2(X) = -4X \left[\operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2 - a^2} + \frac{2ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^4} X^5 - \frac{1}{2} \frac{ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^8} (a^4 - 6a^2h^2 + h^4) \right] \quad (63d)$$

D'où l'expression globale de $B_Y = F_1(X) + F_2(X)$

$$B_Y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi ab} \operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2 - a^2} X \left[1 - \frac{1}{10} \frac{ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^4 \operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2 - a^2}} X^4 + \frac{1}{72} \frac{ah(h^2 - a^2)}{(h^2 + a^2)^8} \cdot \frac{(a^4 + h^4 - 6a^2h^2)}{\operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2 - a^2}} X^8 \right] \quad (69)$$

qui permet d'obtenir les coefficients K_6 et K_{10} définis au paragraphe 1 .

Si on fait tendre a vers 0 , $\operatorname{Arctg} \frac{2ah}{h^2 - a^2}$ tend vers $2a/b$, et h tend vers b . D'où :

$$B_Y = -\frac{\mu_0 I}{\pi b^2} X \left(1 - \frac{1}{20} \left(\frac{X}{b} \right)^4 + \frac{1}{144} \left(\frac{X}{b} \right)^8 \right)$$

on retrouve l'expression de B_Y fournie par quatre nappes minces de largeur b .

Par dérivation de (66) on s'aperçoit que seuls subsistent les termes qui constituent le coefficient de X dans $F_2(X)$: tous les autres s'annulent deux à deux . On obtient alors :

$$K(X) = 2\lambda \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{\gamma} \right) \right] \quad (70)$$

ou en fonction de $j = I/4ab$, de $\alpha = a/b$ et de $u = X/b$

$$K(u) = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \left[\operatorname{Arctg} \frac{4\alpha(1+\alpha) - u^2}{2(1+2\alpha)} + \operatorname{Arctg} \frac{4\alpha(1+\alpha) + u^2}{2(1+2\alpha)} \right] \quad (71)$$

et

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{2\alpha(1+\alpha)}{1+2\alpha} \quad (72)$$

2.2 - Induction et gradient sur Ox

En un point P de coordonnées $X = Y = x\sqrt{2}$, on a :
 $B_x = B_y\sqrt{2}$ et :

$$\begin{aligned} \frac{B_y}{\lambda} = & \frac{\beta}{2} \left[\operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2 + (X+\gamma)^2}{(X-\beta)^2 + (X+\gamma)^2} - \operatorname{Log} \frac{(X-\beta)^2 + (X-\gamma)^2}{(X+\beta)^2 + (X-\gamma)^2} \right] \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[\operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2 + (X-\gamma)^2}{(X+\beta)^2 + (X+\gamma)^2} - \operatorname{Log} \frac{(X-\beta)^2 + (X+\gamma)^2}{(X-\beta)^2 + (X-\gamma)^2} \right] \\ & + \beta \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{X+\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{X+\gamma} \right) + \left(\operatorname{Arctg} \frac{X-\beta}{X-\gamma} - \operatorname{Arctg} \frac{X+\beta}{X-\gamma} \right) \right] \\ & + \gamma \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{X+\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{X+\beta} \right) + \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{X-\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{X-\beta} \right) \right] \\ & + 2X \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{X+\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{X+\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{X+\gamma}{X-\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{X-\gamma}{X-\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (73)$$

Le gradient s'écrit $K(x) = K(X)$, et :

$$\frac{K(x)}{\lambda} = 2 \left[\left(\operatorname{Arctg} \frac{x+\gamma}{x+\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{x-\gamma}{x+\beta} \right) - \left(\operatorname{Arctg} \frac{x+\gamma}{x-\beta} - \operatorname{Arctg} \frac{x-\gamma}{x-\beta} \right) \right]$$

$$\frac{K(x)}{\lambda} = 2 \left[\operatorname{Arctg} \frac{(x-\beta)^2 + x^2 - \gamma^2}{2\gamma(x-\beta)} - \operatorname{Arctg} \frac{(x+\beta)^2 + x^2 - \gamma^2}{2\gamma(x+\beta)} \right] \quad (74)$$

$$\text{ou} \quad \frac{K(x)}{\lambda} = 2 \left[\operatorname{Arctg} \frac{(u-(1+2x))^2 + u^2 - 1}{2u - 2(1+2x)} - \operatorname{Arctg} \frac{(u+(1+2x))^2 + u^2 - 1}{2u + 2(1+2x)} \right] \quad (75)$$

REFERENCES

- 1 - P. GRIVET et A. SEPTIER
Les lentilles quadrupolaires magnétiques
CERN 58-25 , octobre 1958
- 2 - I.E.DAYTON, E.C.SHOEMAKER, R.F.MOZLEY
Study of quadrupole magnets
R.S.I. 25 , n°5 , 1954, p.485
- 3 - J.G. GOTTINGHAM, W.H. MOORE, E.J. ROGERS, C.M. TURNER
(The Cosmotron) Injection system., part II : Injection Optics
R.S.I. 24, n°9, 1953, p.816
- 4 - I.N. HANI , W.K.FANCFSKY
Magnetic Quadrupole with rectangular Aperture
R.S.I. **30**, n°10, 1959, p.927-3
- 5 - S. VAN DER MEER
Comparison between Quadrupole Lenses of classical Design
and "Panofsky lenses"
CERN - PS/ Int MM 59-8, août 1959 - Non publié -

-:-:-:-:-

FIG. 1

FIG. 2

FIG. 3

FIG. 6

FIG. 7

FIG. 8

FIG. 10

COUCHES
MINCES
FIG. 11

FIG.12

FIG.13

FIG.14

FIG. 15

$$\frac{y}{b} = \alpha$$

$$\frac{z}{b} = t$$

$$\frac{x}{b} = u$$

BOBINES
EPAISSES

FIG. 16

FIG.17

FIG.18

FIG. 21

FIG. 22