the

IC/2000/119

abdus salam
international
centre
for theoretical
physics

**RELATION D'EQUIVALENCE SUR LES
ALGEBRES QUASI-BATALIN-VILKOVISKY
DIFFERENTIELLES**

Momo Bangoura

SCAN-0011011

CERN LIBRARIES, GENEVA

0748001

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency
THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

**RELATION D'EQUIVALENCE SUR LES ALGÈBRES
QUASI-BATALIN-VILKOVISKY DIFFÉRENTIELLES**

Momo Bangoura¹

Département de Mathématiques, Université de Conakry, BP 1147, Guinée²
and

The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebras are generalisations of differential Batalin-Vilkovisky algebras, introduced by Getzler for applications to topological conformal field theory. As for Lie quasi-bialgebra structures on a finite-dimensional vector space $\mathcal{F}$, we define an equivalence relation on unimodular differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebra structures on $\Lambda\mathcal{F}^*$, the exterior algebra of the dual of $\mathcal{F}$. Therefore, using the relation between Lie quasi-bialgebras and quasi-Batalin-Vilkovisky algebras, we show that unimodular differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebra structures on $\Lambda\mathcal{F}^*$ are equivalent if and only if the corresponding Lie quasi-bialgebra structures on $\mathcal{F}$ are equivalent.

MIRAMARE – TRIESTE

August 2000

¹Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail: bangm@ictp.trieste.it

²Permanent address. E-mail: momo.bangoura@gn.refer.org

Résumé

Les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles sont des généralisations des algèbres de Batalin-Vilkovisky différentielles introduites par Getzler en vue d'applications à la théorie conforme des champs topologique. Comme pour les structures de quasi-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie, on définit une relation d'équivalence sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, l'algèbre extérieure du dual de $\mathcal{F}$. Par ailleurs, utilisant le lien entre les quasi-bigèbres de Lie et les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles, on montre que des structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ sont équivalentes si et seulement si les structures correspondantes de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ sont équivalentes.

1 Introduction

Ce travail est une suite logique de [1], où il est prouvé l'existence d'une correspondance bijective entre les structures de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie telles que $\partial_\mu \phi$ appartienne à l'image de γ , et les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, l'algèbre extérieure du dual de $\mathcal{F}$. L'objet de ce travail est de montrer qu'à l'image du twisting sur les structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$, il existe une relation d'équivalence sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$.

Dans la section 2, nous faisons un bref rappel sur les quasi-bigèbres de Lie en montrant que si une structure de quasi-bigèbre de Lie unimodulaire $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur $\mathcal{F}$ est telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, le centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$, alors toute structure de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ équivalente à $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ modulo twisting satisfait la propriété $\partial_\mu \phi' = \gamma'(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r})$ où $\mathbf{r}$ est l'élément de twist.

Dans la section 3, nous rappelons quelques notions sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle qui sont en fait un exemple d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près [1],[9], puis nous définissons une relation d'équivalence sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ que nous appelons aussi twisting et nous montrons que des structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ sont équivalentes par twisting si et seulement si les structures correspondantes de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ sont équivalentes par twisting. Ainsi nous concluons que les classes d'équivalence d'algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles unimodulaires sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ sont en correspondance bijective avec les classes d'équivalence de quasi-bigèbres de Lie unimodulaires $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur $\mathcal{F}$ telles que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$.

2 Couples de Manin et quasi-bigèbres de Lie

Dans cette section, nous rappelons les notions de quasi-bigèbre de Lie, de couple de Manin et de twisting ainsi que les relations entre elles. Pour plus de détails voir ([3], [6]).

Une quasi-bigèbre de Lie est une algèbre de Lie $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ munie d'un cocycle $\gamma : \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{F}$ dont le transposé définit un crochet sur le dual de $\mathcal{F}$ ne vérifiant pas l'identité de Jacobi, le défaut d'identité de Jacobi étant le cobord d'un élément $\phi \in \Lambda^3 \mathcal{F}$.

Une telle quasi-bigèbre de Lie est notée $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$. Dans le cas où $\phi = 0$, le triplet $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ est une bigèbre de Lie.

Nous allons à présent définir une relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres de Lie appelée twisting, qui permet de construire de nouvelles quasi-bigèbres de Lie à partir d'une déjà connue. Pour cela nous commençons tout d'abord par énoncer le résultat suivant ([3], [6]) :

Proposition 2.1 *Soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie et $\mathbf{r} \in \Lambda^2 \mathcal{F}$. Posons*

$$\gamma' = \gamma + \delta_\mu \mathbf{r}$$

$$\phi' = \phi + d_\gamma \mathbf{r} - \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu,$$

où δ_μ est l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ à valeurs dans $\Lambda \mathcal{G}$, d_γ est "l'opérateur de Chevalley-Eilenberg à coefficients triviaux" défini par γ ($d_\gamma^2 \neq 0$) et $[\ , \]^\mu$ est le crochet de Schouten algébrique défini par μ . Alors $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ est encore une quasi-bigèbre de Lie.

D'où la définition

Définition 2.1 *Une quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ est dite liée à $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ par twisting, s'il existe $\mathbf{r} \in \Lambda^2 \mathcal{F}$ tel que les formules ci dessus soient vérifiées.*

On note alors $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi') \sim (\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi) (mod \mathbf{r})$ et $\mathbf{r}$ est l'élément de twist.

Nous avons le résultat suivant ([3], [6]):

Proposition 2.2 *La relation de twisting est une relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres de Lie.*

Ainsi l'étude des quasi-bigèbres de Lie est rendue facile grâce au twisting, qui permet de les étudier en termes de classes d'équivalence.

Rappelons à présent la notion de couple de Manin due à Drinfeld [3] :

Définition 2.2 *Un couple de Manin consiste en un couple $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{D}$ est une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant non dégénéré et $\mathcal{F}$ une sous-algèbre de Lie isotrope de dimension maximale de $\mathcal{D}$.*

Dans [3] et [6], on montre que les classes d'équivalence de quasi-bigèbres de Lie modulo twisting sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.

Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$, l'opérateur $\mathcal{L} = d_\gamma \partial_\mu + \partial_\mu d_\gamma$, où ∂_μ est l'opérateur transposé de l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg à coefficients triviaux défini par μ , est une dérivation; il est appelé le **laplacien** de la quasi-bigèbre de Lie. Nous dirons qu'une quasi-bigèbre de Lie est **unimodulaire** si son laplacien est nul. Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie unimodulaire telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$ le centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$. Alors toute quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ obtenue de $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ par twisting est telle que $\partial_\mu \phi' \in \text{Im} \gamma'$ et $\partial_\mu \phi' = \gamma'(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r})$ où $\mathbf{r} \in \Lambda^2 \mathcal{F}$ est l'élément de twist.*

Démonstration: En effet soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie unimodulaire telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$ et soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi') \sim (\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)(\text{mod } \mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Lambda^2 \mathcal{F}$, i.e

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma + \delta_\mu \mathbf{r}, \\ \phi' &= \phi + d_\gamma \mathbf{r} - \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi' &= \partial_\mu \phi + (\partial_\mu d_\gamma)(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \partial_\mu ([\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu) \\ &= \gamma(x_0) - (d_\gamma \partial_\mu)(\mathbf{r}) - [\partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu \\ &= \gamma(x_0) - \gamma(\partial_\mu \mathbf{r}) + [x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu \\ &= \gamma(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}) + (\delta_\mu \mathbf{r})(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}) \\ &= (\gamma + \delta_\mu \mathbf{r})(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}) \\ &= \gamma'(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}).\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Ainsi on remarque que sous l'action du twist, x_0 est transformé en $x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}$. D'autre part, $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ n'est pas unimodulaire; elle l'est à équivalence près. Par ailleurs, d'après [1], dans les conditions de la proposition précédente, il correspond à $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ et $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ deux structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda \mathcal{F}^*$, lesquelles structures seront décrites dans la suite.

3 Twisting pour les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda \mathcal{F}^*$

Dans cette section nous rappelons la définition générale d'une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle, et comme pour les quasi-bigèbres de Lie, nous définissons une relation d'équivalence sur une classe particulière de structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda \mathcal{F}^*$ en établissant le lien avec les structures correspondantes de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$. Pour plus de détails voir ([4], [1]).

Définition 3.1 Une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est un quadruplet $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ où A est une algèbre commutative graduée munie d'une dérivation du second ordre Δ de degré -1 , d'une dérivation δ de degré 1 et d'un opérateur différentiel Φ d'ordre 3 de degré -3 tels que

$$3.1. \delta^2 = 0,$$

$$3.2. \delta\Delta + \Delta\delta \text{ est un opérateur différentiel du premier ordre,}$$

$$3.3. \Delta^2 + \delta\Phi + \Phi\delta = 0,$$

$$3.4. \Delta\Phi + \Phi\Delta = \Phi^2 = 0.$$

Dans le cas où $\Phi = 0$, le triplet (A, Δ, δ) satisfaisant les conditions 3.1 – 3.3 est une algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle ([4], [7]); le couple (A, Δ) satisfaisant la condition $\Delta^2 = 0$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky [5].

Pour une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle donnée $(A, \Delta, \delta, \Phi)$, l'opérateur $L = [\Delta, \delta]$, commutateur de Δ et δ , est appelé le **laplacien** de l'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. On montre dans [1] que L commute avec les opérateurs Δ , δ et Φ , donc $\text{Ker} L$ est munie d'une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle induite de celle de A et l'opérateur Δ induit sur $H(\text{Ker} L, \delta)$, la cohomologie de $\text{Ker} L$, une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

On dit qu'une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky est **unimodulaire** si son laplacien est nul.

On a le résultat suivant

Proposition 3.1 Soit $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de dimension finie et $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie unimodulaire telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$. Alors la structure correspondante d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ est unimodulaire.

Démonstration : En effet soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une quasi-bigèbre de Lie unimodulaire telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$. Alors d'après [1], il lui correspond une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ telle que

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \delta = d_\mu, \phi = i_\phi.$$

Le laplacien de $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ est

$$L = [\delta, \Delta] = [d_\mu, \partial_\gamma] + [d_\mu, i_{x_0}].$$

Mais $[d_\gamma, \partial_\mu] = 0$ et $x_0 \in Z(\mathcal{G})$ par hypothèse; d'où

$$[d_\mu, \partial_\gamma] = [d_\gamma, \partial_\mu]^* = 0, [d_\mu, i_{x_0}] = ad_{x_0}^* = 0.$$

Par conséquent $L = 0$ et $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ est unimodulaire. $\square$

La réciproque de ce résultat sera établie dans la suite.

Soit $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de dimension finie et δ un opérateur différentiel sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ de degré 1 de carré nul. Pour tout $X \in \Lambda\mathcal{F}$, définissons sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ les opérateurs suivants :

$$i_X : \Lambda^k \mathcal{F}^* \rightarrow \Lambda^{k-|X|} \mathcal{F}^*,$$

$$L_X : \Lambda^k \mathcal{F}^* \rightarrow \Lambda^{k-|X|+1} \mathcal{F}^*$$

où i_X est l'opérateur de contraction par X et

$$L_X = [\delta, i_X],$$

le crochet commutateur de δ et de i_X .

Désignons par ∂ l'opérateur transposé de δ et $[\ , \]_\partial$ le crochet de Lie gradué sur $\Lambda \mathcal{F}$ engendré par ∂ ([7],[8]), c'est-à-dire $\forall X, Y \in \Lambda \mathcal{F}$

$$[X, Y]_\partial = (-1)^{|X|}(\partial(X \wedge Y) - (\partial X) \wedge Y - (-1)^{|X|} X \wedge (\partial Y)).$$

Soit $I_{\Lambda \mathcal{F}}$ l'ensemble des opérateurs sur $\Lambda \mathcal{F}^*$ consistant en des contractions par des éléments de $\Lambda \mathcal{F}$. Posons

$$d_\delta = [\delta, \cdot],$$

et pour tous $X, Y \in \Lambda \mathcal{F}$, posons

$$[i_X, i_Y]^\delta = [i_X, [\delta, i_Y]].$$

Alors on a le résultat suivant :

Proposition 3.2 *Pour tous $X, Y \in \Lambda \mathcal{F}$ on a :*

3.5. $[\delta, L_X] = 0$, ou de façon équivalente $d_\delta^2 = 0$,

3.6. $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]_\partial}$,

3.7. $[i_X, L_Y] = i_{[X, Y]_\partial}$,

3.8. $[i_X, i_Y] = 0$,

3.9. $[\ , \]^\delta$ définit sur $I_{\Lambda \mathcal{F}}$ une structure d'algèbre de Lie graduée,

3.10. $d_\delta([i_X, i_Y]^\delta) = [d_\delta(i_X), d_\delta(i_Y)]$, ou en d'autres termes l'opérateur d_δ est un morphisme d'algèbres de Lie graduées de $(I_{\Lambda \mathcal{F}}, [\ , \]^\delta)$ dans $(I_{\Lambda \mathcal{F}}, [\ , \])$.

Ce résultat se démontre par un calcul utilisant les propriétés du crochet commutateur et les définitions des différents opérateurs.

Remarques :

1- La propriété 3.7 relie les crochets $[\ , \]^\delta$ sur $I_{\Lambda \mathcal{F}}$ et $[\ , \]_\partial$ sur $\Lambda \mathcal{F}$; cette relation s'exprime par

$$[i_X, i_Y]^\delta = i_{[X, Y]_\partial}.$$

2- Les propriétés 3.6 et 3.10 sont équivalentes.

3- Dans le cas où $\delta = d_\mu$, μ définissant un crochet de Lie sur $\mathcal{F}$, alors le crochet $[\ , \]_\partial$ n'est rien d'autre que le crochet de Schouten algébrique $[\ , \]^\mu$ ([6],[7]).

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3 Soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ et $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{F}$. Posons

$$\Delta' = \Delta + [\delta, i_{\mathbf{r}}],$$

$$\Phi' = \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]].$$

Alors $(A, \Delta', \delta, \Phi')$ est encore une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$.

Démonstration: Ce résultat se démontre par un calcul direct utilisant le fait que $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ est une structure unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ et la proposition 3.2. En effet soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, c'est-à-dire $L = [\delta, \Delta] = 0$; alors il est clair que $L' = [\delta, \Delta'] = 0$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} (\Delta')^2 &= \Delta^2 + [\Delta, [\delta, i_{\mathbf{r}}]] + \frac{1}{2}[[\delta, i_{\mathbf{r}}], [\delta, i_{\mathbf{r}}]] \\ &= -[\delta, \Phi] + [\delta, [\Delta, i_{\mathbf{r}}]] - [i_{\mathbf{r}}, [\Delta, \delta]] + \frac{1}{2}[\delta, [i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]]] \\ &= -[\delta, \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]]] \\ &= -[\delta, \Phi']. \end{aligned}$$

D'où

$$(\Delta')^2 + [\delta, \Phi'] = 0.$$

Les conditions $\Delta'\Phi' + \Phi'\Delta' = 0$ et $(\Phi')^2 = 0$ se démontrent de la même manière. $\square$

Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.2 Une Structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire $(A, \Delta', \delta, \Phi')$ sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ est dite liée à $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ par twisting s'il existe $\mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{F}$ tel que les formules ci-dessus soient vérifiées.

Remarque : Les formules définissant le twisting peuvent encore s'écrire sous la forme

$$\Delta' = \Delta + d_{\delta}\mathbf{r},$$

$$\Phi' = \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, i_{\mathbf{r}}]^{\delta}.$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.4 La relation de twisting est une relation d'équivalence sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$.

Démonstration: La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Montrons la transitivité. En effet soient $(A, \Delta, \delta, \Phi)$, $(A, \Delta', \delta, \Phi')$, $(A, \Delta'', \delta, \Phi'')$ trois structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ telles que

$$(A, \Delta', \delta, \Phi') \sim (A, \Delta, \delta, \Phi)(mod \mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{F}$$

$$(A, \Delta'', \delta, \Phi'') \sim (A, \Delta', \delta, \Phi')(mod \mathbf{r}'), \mathbf{r}' \in \Lambda^2\mathcal{F}$$

i.e

$$\begin{aligned}\Delta' &= \Delta + [\delta, i_{\mathbf{r}}] \\ \Phi' &= \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]] \\ \Delta'' &= \Delta' + [\delta, i_{\mathbf{r}'}] \\ \Phi'' &= \Phi' + [\Delta, i_{\mathbf{r}'}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}'}, [\delta, i_{\mathbf{r}'}]].\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\Delta'' = \Delta + [\delta, i_{\mathbf{r}''}],$$

et

$$\Phi'' = \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}''}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}''}, [\delta, i_{\mathbf{r}''}]]$$

où $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + \mathbf{r}'$. D'où $(A, \Delta'', \delta, \Phi'') \sim (A, \Delta, \delta, \Phi)(\text{mod } \mathbf{r}'')$.

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Le résultat suivant est la réciproque de la proposition 3.1; on l'énonce ici et la démonstration suivra par celle du théorème 3.1.

Proposition 3.5 *Soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$. Alors la structure correspondante de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur $\mathcal{F}$ est, modulo twisting, unimodulaire et telle que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$.*

Nous allons à présent établir une correspondance entre la relation de twisting sur les structures de quasi-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie et celle sur les structures correspondantes d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$.

Théorème 3.1 *Deux structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ sont équivalentes par twisting si et seulement si les structures correspondantes de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ sont équivalentes par twisting.*

Démonstration: En effet soit

$$(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi') \sim (\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)(\text{mod } \mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Lambda^2 \mathcal{F},$$

avec $d_\gamma \partial_\mu + \partial_\mu d_\gamma = 0$, $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$.

Alors

$$\gamma' = \gamma + \delta_\mu \mathbf{r},$$

et

$$\phi' = \phi + d_\gamma \mathbf{r} - \frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu.$$

Comme $\partial_\mu \phi' = \gamma'(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r})$, d'après le théorème 5.1 de [1], il correspond à ces deux structures de quasi-bigèbre de Lie deux structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ et $(A, \Delta', \delta, \Phi')$ définies de la manière suivante :

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \Phi = i_\phi, \delta = d_\mu,$$

$$\Delta' = \partial_{\gamma'} + i_{(x_0 - \partial_\mu \mathbf{r})}, \Phi' = i_{\phi'}.$$

Comme $d_{(\delta_\mu \mathbf{r})}(X) = -[\mathbf{r}, X]^\mu, \forall X \in \Lambda\mathcal{F}$, utilisant le fait que l'opérateur d'homologie ∂_μ engendre le crochet de Schouten algébrique [7], on obtient $\partial_{\gamma'} = \partial_\gamma + [d_\mu, i_{\mathbf{r}}] + i_{\partial_\mu \mathbf{r}}$. D'où

$$\begin{aligned}\Delta' &= \partial_\gamma + i_{x_0} + [d_\mu, i_{\mathbf{r}}] \\ &= \Delta + [d_\mu, i_{\mathbf{r}}].\end{aligned}$$

De même, utilisant le fait que d_γ est une dérivation sur $\Lambda\mathcal{F}$ et que ∂_μ engendre le crochet de Schouten algébrique, on trouve

$$\Phi' = \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, [d_\mu, i_{\mathbf{r}}]].$$

Ainsi $(A, \Delta', \delta, \Phi') \sim (A, \Delta, \delta, \Phi)(mod \mathbf{r})$. D'après les propositions 3.1 et 3.3, les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles ainsi obtenues sont unimodulaires.

La réciproque suit par la proposition 4.6 de [1], et démontre en même temps la proposition 3.5. En effet, soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ et soit $(A, \Delta', \delta, \Phi')$ une structure arbitraire équivalente à elle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\Delta' &= \Delta + [\delta, i_{\mathbf{r}}], \\ \Phi' &= \Phi + [\Delta, i_{\mathbf{r}}] - \frac{1}{2}[i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]], \mathbf{r} \in \Lambda^2\mathcal{F}.\end{aligned}$$

Alors il existe deux quasi-bigèbres de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ et $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi')$ avec $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $\partial_\mu \phi' = \gamma'(x'_0)$, $x_0, x'_0 \in \mathcal{F}$ telle que

$$\begin{aligned}\Delta &= \partial_\gamma + i_{x_0}, \delta = d_\mu, \Phi = i_\phi, \\ \Delta' &= \partial_{\gamma'} + i_{x'_0}, \Phi' = i_{\phi'}.\end{aligned}$$

Comme d_γ est une dérivation sur $\Lambda\mathcal{F}$ et ∂_μ engendre le crochet de Schouten algébrique, de ce qui précède, on a :

$$[\delta, i_{\mathbf{r}}] = \partial_{\delta_\mu \mathbf{r}} - i_{\partial_\mu \mathbf{r}}, [\Delta, i_{\mathbf{r}}] = i_{d_\gamma \mathbf{r}}, [i_{\mathbf{r}}, [\delta, i_{\mathbf{r}}]] = i_{[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu}.$$

D'où, par identification, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma + \delta_\mu \mathbf{r}, \\ \phi' &= \phi + d_\gamma \mathbf{r} - \frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu, \\ x'_0 &= x_0 - \partial_\mu \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{F}, \mu, \gamma', \phi') \sim (\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)(mod \mathbf{r})$. Par ailleurs, la condition $\partial_\mu \phi' = \gamma'(x'_0)$ entraîne $ad_{x_0}^\mu \mathbf{r} = 0$; $\mathbf{r}$ étant quelconque, $ad_{x_0}^\mu = 0$ et donc $x_0 \in Z(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$. $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ étant unimodulaire, son laplacien est nul, c'est-à-dire

$$L = [d_\mu, \partial_\gamma] + ad_{x_0}^{*\mu} = [d_\mu, \partial_\gamma] = 0;$$

donc le laplacien de $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ est nul, car

$$\mathcal{L} = [d_\gamma, \partial_\mu] = [d_\mu, \partial_\gamma]^* = 0.$$

En définitive $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ est unimodulaire avec $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$.

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 3.1 *Les classes d'équivalence de structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence de structures de quasi-bigèbre de Lie unimodulaire $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur $\mathcal{F}$ telles que $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$, $x_0 \in Z(\mathcal{G})$.*

Corollaire 3.2 *Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie simple complexe; alors il existe, modulo twisting, une unique structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, qui est unimodulaire.*

Démonstration : Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie simple complexe. Alors d'après [2], modulo twisting, $\mathcal{G}$ a une unique structure de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, 0, \phi)$ qui est quasitriangulaire, où

$$\phi = -\frac{1}{2}[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]^\mu = [\mathfrak{t}^{13}, \mathfrak{t}^{23}],$$

$\mathfrak{t}$ étant la forme de Killing de $\mathcal{G}$. Il est évident que cette structure est unimodulaire; par conséquent, d'après ce qui précède, comme $\partial_\mu \phi = 0$ ($\mathfrak{t}$ est ad^μ -invariant), il correspond, modulo twisting, une unique structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ qui est unimodulaire. $\square$

Ainsi, comme on le voit, si $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ est une algèbre de Lie simple complexe, alors toute structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$ est unimodulaire.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses nombreuses remarques et suggestions sur le contenu du travail. Les remerciements vont également au Centre *Abdus Salam* ICTP pour l'hospitalité et le soutien matériel qui ont permis la réalisation de ce travail.

This work was done within the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Financial support from the Swedish International Development Cooperation Agency (SIDA) is acknowledged.

References

- [1] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles*, Preprint ICTP (1999) IC/99/174.
- [2] M. Bangoura, Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. math. Physics, 28 (1993) 13-29.
- [3] V.G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J; 1 (6) (1990), 1419-1457.
- [4] E. Getzler, *Manin pairs and topological conformal field theory*, Ann. Physics (N.Y) 237 (1995) 161-201.

- [5] J. Huebschmann, *Lie Rinehart, Gerstenhaber algebras, and Batalin-Vilkovisky algebras*, Ann. Inst. Fourier 48 (1998) 425-440.
- [6] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Contemporary Mathematics 132 (1992) 459-489.
- [7] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*, Acta Appl. math. 41 (1995) 153-165.
- [8] J.L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série, Soc. Math. France, Paris (1985) 257-271.
- [9] O. Kravchenko, *Deformations of Batalin-Vilkovisky algebras*, Banach Center Publications 51 (2000).