*Prépublication de
l' Institut de
Recherche
Mathématique
Avancée*

Strasbourg

DESCRIPTION DU DUAL ADMISSIBLE DE $U(2,1)(F)$ PAR
LA THÉORIE DES TYPES DE C. BUSHNELL ET P. KUTZKO

Laure BLASCO

CERN LIBRARIES, GENEVA

CM-P00066609

2000/19

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

**DESCRIPTION DU DUAL ADMISSIBLE DE $U(2,1)(F)$ PAR
LA THÉORIE DES TYPES DE C. BUSHNELL ET P. KUTZKO**

par

Laure BLASCO

Mathematics subject classification : 20G, 22E50.

Mots clés : représentations des groupes, groupe unitaire, corps local non archimédien, types.

Description du dual admissible de $U(2,1)(F)$ par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko

(F local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire)

LAURE BLASCO

ABSTRACT : We determine types [BK3] for all inertial classes of irreducible representations of the unitary group in three variables over a nonarchimedean field of odd residual characteristic.

Dans ce travail, nous décrivons explicitement le dual admissible du groupe unitaire $G = U(2,1)(F)$ à trois variables sur un corps local non archimédien F (supposé de caractéristique résiduelle impaire) à l'aide des types de C. Bushnell et P. Kutzko [BK3]. Une telle description peut être utile dans l'étude de problèmes provenant de l'arithmétique mais aussi, grâce à son analogie avec celle du groupe linéaire $GL(3)$, dans une approche purement locale du problème de changement de base.

Plus précisément, nous dressons une liste de paires (J, λ) où J est un sous-groupe ouvert compact de G et λ une représentation lisse irréductible de J , telle que

1. toute représentation lisse irréductible π de G contient une paire (J, λ) au sens où λ est une sous-représentation de la restriction de π à J ;
2. deux représentations lisses irréductibles de G contiennent la même paire si et seulement si leurs supports cuspidaux appartiennent à la même classe d'inertie.

La deuxième condition est la définition même des *types* pour une unique classe d'inertie dans G [BK3, §4]. Rappelons qu'une classe d'inertie dans G est une classe d'équivalence de paires (L, σ) où L est un sous-groupe de Levi de G et σ une représentation supercuspidale irréductible de L , pour une relation combinant l'isomorphie des représentations, la torsion par un caractère non ramifié et la conjugaison dans G . Dans le cas de $U(2,1)(F)$, les classes d'inertie sont les classes d'isomorphie d'une représentation supercuspidale irréductible ou les ensembles formés des classes de conjugaison sous G des caractères d'un tore maximal T ayant même restriction au sous-groupe compact maximal de T .

Nous obtenons en outre que, pour toute représentation supercuspidale irréductible π de G , il existe une paire (J, λ) de la liste, telle que π soit (à isomorphisme près) l'induite compacte à G de λ .

Ce dernier point a été établi par D. Jabon dans sa thèse [Ja] sous l'hypothèse supplémentaire que l'extension quadratique attachée à G est non ramifiée sur F . Son travail fait suite, du point de vue des résultats comme du point de vue des méthodes employées, à l'article d'A. Moy [Moy]. Il part donc de la classification des représentations de G par les représentations dites *non dégénérées* et raisonne en termes d'isomorphismes entre algèbres de Hecke.

Par contre, nous suivons ici la même démarche que C. Bushnell et P. Kutzko dans l'étude du dual admissible de $GL(N)$ [BK, 1 et 4]. Nous manipulons donc *strates* (§2) et formules d'entrelacements.

Signalons dès à présent que les représentations de niveau 0 ont été étudiées par L. Morris [Mor3] dans un cadre bien plus général. Par souci d'exhaustivité, nous avons énoncé ses résultats dans le cas particulier de $U(2,1)(F)$ au paragraphe 3.

De plus, la théorie des paires couvrantes (ou G -covers) de C. Bushnell et P. Kutzko [BK3] et la méthode de construction décrite par C. Blondel [B12] permettent d'obtenir directement une liste complète de types pour les classes d'inertie de la série principale (§7).

Il reste donc à décrire toutes les représentations supercuspidales de G de niveau strictement positif et, en premier lieu, à les caractériser parmi les autres.

Fixons une représentation irréductible π de G de niveau strictement positif. Grâce aux travaux de A. Moy et G. Prasad [MP], cette représentation contient une *strate fondamentale* soit approximativement, un caractère d'un sous-groupe compact ouvert particulier de G (§2). Nous construisons alors par approximations successives, une suite "croissante" de paires (K, ρ) formées d'un sous-groupe compact ouvert K et d'une représentation irréductible ρ de K , toutes contenues dans π , jusqu'à en obtenir une dont l'entrelacement soit compact ou qui contienne une paire couvrante.

Cette construction varie suivant la forme de la strate fondamentale contenue dans π , ou plus exactement celle de son polynôme caractéristique $\varphi(X)$ (§2). Par exemple, lorsque $\varphi(X)$ est irréductible, la paire (K, ρ) fournie par la strate fondamentale convient (§4) et π est supercuspidale. Par contre, lorsque $\varphi(X)$ est produit d'au moins deux facteurs premiers entre eux, la construction est plus délicate et repose sur des idées de [BK4] (§5). La représentation π peut alors être supercuspidale ou non.

Le premier exemple est un cas particulier de strate *non scindée*, c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique ne possède qu'un seul facteur irréductible, le second correspond aux strates dites *scindées*.

Arrivés à ce stade, il s'agit de déterminer des types "précis" pour chaque représentation supercuspidale (§6). Là encore, le procédé est "classique" si la strate contenue dans π est non scindée ([BK2, §10] par exemple), plus complexe si elle est scindée. Dans ce dernier cas, nous commençons par construire des types à l'aide de types dans les groupes unitaires de dimension plus petite puis nous montrons l'exhaustivité par un procédé de comptage reposant sur des isomorphismes entre algèbres de Hecke. Ces derniers s'établissent aisément grâce aux formules d'entrelacements calculées à l'étape précédente. Notons que les constructions faites dans ce cas s'avèrent être des exemples des constructions générales de types élaborées par S. Stevens dans [St2].

Remarquons que pour mener à bien notre construction, conjugaison et torsion par un caractère de G sont des opérations licites. Si elles ne perturbent en rien la cuspidalité de la représentation π , il convient d'ajouter aux types obtenus aux paragraphes 3 et 6 ceux que l'on obtient par torsion par un caractère ramifié de G .

Décrivons maintenant le déroulement du papier. Après quelques notations, nous avons rassemblé les résultats utilisés sur les suites (§1), puis sur les strates (§2). L'étude des représentations de G commence au paragraphe 3 par celles de niveau 0, se poursuit par celles contenant une strate fondamentale non scindée (§4) et se termine par celles contenant une strate fondamentale scindée (§5). Ayant caractérisé les représentations supercuspidales, nous déterminons leurs types au paragraphe 6. Les résultats en dimension 2 que nous utilisons figurent en annexe. Le paragraphe 7 est consacré aux types de la série principale.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le soutien patient, les encouragements amicaux et les discussions mathématiques de (et avec) Corinne Blondel. Je l'en remercie vivement.

0. Notations

0.1 Soient F un corps local non archimédien, $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal. On note ϖ_F une uniformisante de $\mathfrak{p}_F$ et k_F le corps résiduel de F . On suppose la caractéristique de k_F impaire.

Soit E une extension quadratique séparable de F : $E = F[\epsilon]$ où ϵ est une unité dans E si E est non ramifiée, une uniformisante si E est ramifiée, choisie dans les deux cas de trace nulle. On note $\mathfrak{o}_E$ l'anneau des entiers de E , $\mathfrak{p}_E$ son idéal maximal, e_0 et f_0 l'indice de ramification et le degré résiduel de $E|_F$.

On désigne par $-$ l'élément non trivial de $\Gamma = \text{Gal}(E/F)$, par ω la valuation normalisée de E ($\omega(E^\times) = \mathbb{Z}$) et par E^1 le sous-groupe de $E^\times$ des éléments de norme 1.

On fixe un caractère additif non trivial ψ_F de F de conducteur $\mathfrak{p}_F$. Le caractère ψ de E obtenu en composant ψ_F avec la trace $\text{tr}_{E/F}$ de E sur F est alors de conducteur $\mathfrak{p}_E$.

0.2 Soit G le groupe des points rationnels sur F du groupe unitaire en trois variables. Il agit naturellement sur un E -espace vectoriel V de dimension 3 comme le groupe d'isométries d'une forme hermitienne¹ non dégénérée notée $\langle, \rangle$. L'espace V contient toujours un sous-espace totalement isotrope maximal de dimension 1 : G se note traditionnellement $U(2, 1)(F)$.

Le groupe G se caractérise à l'aide de l'involution σ définie sur l'algèbre A des endomorphismes E -linéaires de V et induite par $\langle, \rangle$. Concrètement, G est égal à $\{g \in A/g^\sigma g = \text{id}\}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est le sous-espace vectoriel $\{X \in A/X + X^\sigma = 0\}$ du F -espace vectoriel A . Ce dernier se décompose en $A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^+$ où $\mathfrak{g}^+$ est l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ relativement à la forme $(X, Y) \mapsto \text{trd}(XY) = \text{tr}_{E/F} \circ \text{tr}_{A/E}(XY)$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}^+ = \{X \in A/X = X^\sigma\}$. On note $\mathfrak{g}'$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$.

0.3 Plus généralement, on désigne par G_N le groupe des points rationnels sur F d'un groupe unitaire en N variables, V_N , A_N , $\langle, \rangle$, $\mathfrak{g}_N$ les analogues de V , A , $\langle, \rangle$, $\mathfrak{g}$ en dimension N . Lorsque N est pair, G_N représente deux groupes non isomorphes. Par exemple, quand $N = 2$, G_2 est soit $U(2)(F)$, le groupe des points rationnels du groupe unitaire anisotrope, soit $U(1, 1)(F)$ celui du groupe unitaire quasi-déployé.

1. Suites, suites autoduales.

On rassemble dans ce paragraphe les faits connus sur les suites et suites autoduales [BK4, St1] utilisés ultérieurement. On se restreint au cas d'un groupe unitaire.

1.1 Soit Λ une suite de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux dans V_N de période $e = e(\Lambda) \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire [BK4, déf. 2.1] une application de $\mathbb{Z}$ dans l'ensemble des $\mathfrak{o}_E$ -réseaux de V_N telle que

- (i) si $n \geq m$ alors $\Lambda(n) \subset \Lambda(m)$;
- (ii) $\Lambda(n + e) = \mathfrak{p}_E \Lambda(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En particulier, une suite injective est une *chaîne de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux*. En général, on appelle *chaîne de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux sous-jacente* à Λ une chaîne de réseaux ayant même image que Λ .

¹ou anti-hermitienne, le choix est arbitraire.

La suite duale $\Lambda^\sharp$ est la suite $n \mapsto \Lambda(-n)^\sharp$ où $L^\sharp$ désigne le dual du $\mathfrak{o}_E$ -réseau L , c'est-à-dire $L^\sharp = \{x \in V_N : x, L >_N \subset \mathfrak{o}_E\}$.

La suite Λ est dite *autoduale* si et seulement si Λ et $\Lambda^\sharp$ ont même image. Supposons que Λ est une suite autoduale, il existe un unique entier d_Λ tel que $\Lambda(j)^\sharp = \Lambda(d_\Lambda - j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ [St1, 1.1.2]. Quitte à composer Λ avec une translation, on peut supposer, et on supposera (sauf mention contraire) que $d_\Lambda \in \{0, 1\}$.

1.2 À une suite Λ de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux de V_N , on associe pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le $\mathfrak{o}_E$ -réseau de A_N

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{x \in A_N : x\Lambda(m) \subset \Lambda(m+n), m \in \mathbb{Z}\}$$

ainsi qu'une valuation $\nu_\Lambda : A_N \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par : $\nu_\Lambda(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : x \in \mathfrak{a}_n(\Lambda)\}$.

On rappelle que $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ n'est autre que l'ordre héréditaire déterminé par une chaîne sous-jacente à Λ et $\mathfrak{a}_1(\Lambda)$ son radical de Jacobson ([BK4, §2.3]).

Si en outre, la suite Λ est autoduale, les $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$ sont stables sous l'involution σ et, la caractéristique résiduelle étant impaire, $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$ se décompose, en tant que $\mathfrak{o}_F$ -réseau, en

$$(1.2.1) \quad \mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n^-(\Lambda) \oplus \mathfrak{a}_n^+(\Lambda) \text{ où } \mathfrak{a}_n^-(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap \mathfrak{g}_N \text{ et } \mathfrak{a}_n^+(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap \mathfrak{g}_N^+.$$

De façon analogue, on définit des $\mathfrak{o}_F$ -réseaux dans $\mathfrak{g}'_N$ par

$$(1.2.2) \quad \mathfrak{a}_{-m}'(\Lambda) = \{\alpha \in \mathfrak{g}'_N, \psi_F \circ \alpha(\mathfrak{a}_{m+1}^-(\Lambda)) = 1\}, m \in \mathbb{Z}.$$

1.3 On définit le caractère $\psi_{A_N} = \psi \circ \text{tr}_{A_N/E}$ de A_N . Pour S un sous-ensemble de $\mathfrak{g}_N$, on pose

$$S^\dagger = \{X \in \mathfrak{g}_N : \psi_{A_N}(XY) = 1, Y \in S\} \text{ et } S^* = \{X \in A_N : \psi_{A_N}(XY) = 1, Y \in S\}.$$

On a $S^* \cap \mathfrak{g}_N = S^\dagger$. Si $S = \mathfrak{a}_j^-(\Lambda)$ alors, grâce à (1.2.1), $\mathfrak{a}_j^-(\Lambda)^* \cap \mathfrak{g}_N = \mathfrak{a}_j(\Lambda)^* \cap \mathfrak{g}_N$ puis par [BK4, prop. 2.10],

$$(1.3.1) \quad \mathfrak{a}_j^-(\Lambda)^\dagger = \mathfrak{a}_{1-j}^-(\Lambda).$$

1.4 Désormais, on suppose que V_N se décompose en somme orthogonale de deux sous-espaces V^1 et V^2 : $V_N = V^1 \perp V^2$. Chaque V^i est un E -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne non dégénérée $\langle, \rangle_i$.

Considérons une suite Λ de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale de période e dans V_N . Par [We, Ch.2], $\Lambda^i(j) := \Lambda(j) \cap V^i$ et $\Lambda_i(j)$, le projeté orthogonal de $\Lambda(j)$ sur V^i sont des réseaux dans V^i pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, et $(\Lambda^i(j))^\sharp = (\Lambda(j)^\sharp)_i$, $(\Lambda_i(j))^\sharp = (\Lambda(j)^\sharp)^i$.

En particulier, si pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\Lambda(j) = \Lambda^1(j) \oplus \Lambda^2(j)$, les suites Λ^1 et Λ^2 sont autoduales dans V^1 et V^2 respectivement.

1.5 Inversement, considérons pour $i = 1, 2$, une suite autoduale Λ^i dans V^i de période e_i . On abrège d_{Λ^i} en d_i . On construit une suite autoduale Λ de V_N de la manière suivante.

Tout d'abord, si $k \in \mathbb{N}^*$ et Λ est une suite autoduale de période e , la suite $k\Lambda$ définie par : $k\Lambda(j) = \Lambda(j/k)$ si k divise j , $\Lambda(1 + [j/k])$ sinon, est une suite autoduale de période

ke. De plus, $d_{k\Lambda} \equiv (d_\Lambda - 1)k + 1 \pmod{2}$. On remarque que pour toute suite de réseaux autoduale Λ , $d_{2\Lambda} \equiv 1 \pmod{2}$.

En combinant [BK4, prop. 2.7 (iii)] et (1.2.1), on obtient

$$(1.5.1) \quad \mathfrak{a}_n^-(k\Lambda) = \mathfrak{a}_{[-n/k]}^-(\Lambda) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Revenons à Λ^1 et Λ^2 et notons $e = \text{ppcm}(e_1, e_2)$.

La suite $\Lambda := \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 = \frac{e}{e_1}\Lambda^1 \oplus \frac{e}{e_2}\Lambda^2$ est autoduale dès que $d_{\frac{e}{e_1}\Lambda^1} \equiv d_{\frac{e}{e_2}\Lambda^2} \pmod{2}$, c'est-à-dire que $\frac{d_1-1}{e_1} \equiv \frac{d_2-1}{e_2} \pmod{2}$.

Lorsque $d_{\frac{e}{e_1}\Lambda^1} \not\equiv d_{\frac{e}{e_2}\Lambda^2} \pmod{2}$, on considère la suite $\Lambda = 2\Lambda^1 \oplus 2\Lambda^2$ qui est autoduale par les calculs précédents mais de période $2e$.

Dans les deux cas, Λ est notée $\Lambda^1 \perp \Lambda^2$.

1.6 On complète les notations précédentes en désignant par G^i le groupe unitaire de V^i qui s'identifie au stabilisateur de V^i dans le groupe unitaire G_N , par $\mathfrak{g}^i$ l'algèbre de Lie de G^i et $A_N^{ij} = \text{Hom}(V^j, V^i)$.

L'algèbre A_N est munie de l'involution σ induite par la forme hermitienne de V_N . Cette dernière stabilise A^{ii} , $i = 1, 2$, et définit des applications $\tau : A_N^{21} \rightarrow A_N^{12}$ et $\tau^* : A_N^{12} \rightarrow A_N^{21}$. On a

$$\begin{aligned} \sigma|_{A^{ii}} &= \sigma_i, i = 1, 2 \text{ où } \sigma_i \text{ est l'involution induite par } <, >_i \text{ sur } A^{ii} \text{ et} \\ \tau \circ \tau^* &= \text{id}_{A_N^{12}}, \tau^* \circ \tau = \text{id}_{A_N^{21}}. \end{aligned}$$

De ces dernières égalités et de [BK4, prop. 2.9], on déduit que :

$$(1.6.1) \quad \mathfrak{g}_N \simeq \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus A_N^{21} \text{ où } A_N^{21} \text{ est plongé dans } \mathfrak{g}_N \text{ par } x_{21} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tau(x_{21}) \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix};$$

(1.6.2) si $\Lambda = \Lambda^1 \perp \Lambda^2$ où Λ^i est une suite de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale de période e_i , alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{a}_m^{21}(\Lambda)) &= \mathfrak{a}_m^{12}(\Lambda) \text{ et } \tau^*(\mathfrak{a}_m^{12}(\Lambda)) = \mathfrak{a}_m^{21}(\Lambda) \text{ où } \mathfrak{a}_m^{ij}(\Lambda) = \mathfrak{a}_m(\Lambda) \cap A_N^{ij}; \\ \mathfrak{a}_m^-(\Lambda) \cap A_N^{ii} &= \mathfrak{a}_{me_i/e(\Lambda)}^-(\Lambda^i), i = 1, 2; \\ \mathfrak{a}_m^-(\Lambda) &\simeq \mathfrak{a}_m^-(\Lambda) \cap A_N^{11} \oplus \mathfrak{a}_m^-(\Lambda) \cap A_N^{22} \oplus \mathfrak{a}_m^{21}(\Lambda). \end{aligned}$$

2. Strates, strates fondamentales.

2.1 On utilise dans ce travail la version "latticielle" des strates [BK4, §3; St1].

Définition. - On appelle strate gauche dans A_N un quadruplet (Λ, n, r, b) formé d'une suite de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale Λ , de deux entiers n et r , $n > r \geq 0$, et d'un élément b de $\mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda)$. Deux strates (Λ, n, r, b) et (Λ, n, r, b') sont équivalentes si $b - b' \in \mathfrak{a}_{-r}^-(\Lambda)$.

A une strate gauche (Λ, n, r, b) , sont attachés deux invariants de sa classe d'équivalence : son niveau $\frac{n}{e(\Lambda)}$ et son polynôme caractéristique $\varphi_b \in k_E[X]$ qui est, par définition, la réduction modulo $\mathfrak{p}_E$ du polynôme caractéristique de $y := \varpi^{n/g} b^{e(\Lambda)/g} \in \mathfrak{a}_0^\pm(\Lambda)$ ($g = \text{pgcd}(n, e(\Lambda))$).

2.2 Tant que r reste supérieur à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, une strate gauche (Λ, n, r, b) définit un caractère ψ_b d'un sous-groupe ouvert compact $U_{r+1}(\Lambda)$ de G_N . Plus précisément, on définit

$$U_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap G_N \text{ et, pour chaque } m \in \mathbb{N}^*, U_m(\Lambda) = (1 + \mathfrak{a}_m(\Lambda)) \cap G_N.$$

Le sous-groupe $U_0(\Lambda)$ est ouvert, compact et sa composante connexe de 1, $U_0(\Lambda)^0$, est un sous-groupe parahorique de G_N . L'ensemble $\{U_m(\Lambda), m \in \mathbb{N}^*\}$ est une filtration décroissante de $U_0(\Lambda)^0$ (ou $U_0(\Lambda)$) par des sous-groupes distingués, ouverts et compacts dans G_N .

Lorsque $N = 3$, on obtient ainsi les trois classes de conjugaison de sous-groupes parahoriques de G . Deux sont formées de sous-groupes parahoriques maximaux : l'une associée à une chaîne autoduale de période 1 (d'invariant d nul nécessairement), l'autre à une chaîne autoduale $\mathcal{L}$ de période 2 avec $d_{\mathcal{L}}$ impair (correspondant respectivement aux stabilisateurs d'un sommet spécial ou non de l'immeuble de G). La troisième classe est formée des sous-groupes d'Iwahori de G , associés à une chaîne autoduale de période 3.

Lemme. - Soit Λ une suite de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale, $U_0(\Lambda)$ et $U_m(\Lambda)$, $m \in \mathbb{N}^*$, comme ci-dessus.

(i) Le groupe $U_0(\Lambda)/U_1(\Lambda)$ s'identifie à $\{x \in \mathfrak{a}_0(\Lambda)/\mathfrak{a}_1(\Lambda) : xx^{\bar{\sigma}} = 1\}$ via l'application naturelle. ($\bar{\sigma}$ désigne l'involution induite par σ sur la k_E -algèbre $\mathfrak{a}_0(\Lambda)/\mathfrak{a}_1(\Lambda)$.)

(ii) Le groupe quotient $U_i(\Lambda)/U_j(\Lambda)$ s'identifie à $\mathfrak{a}_i^-(\Lambda)/\mathfrak{a}_j^-(\Lambda)$ pour $2i \geq j \geq i \geq 1$.

(iii) Pour $2i \geq j \geq i \geq 1$, il existe un isomorphisme de groupes abéliens $U_0(\Lambda)$ -équivariant de $\mathfrak{a}_{1-j}^-(\Lambda)/\mathfrak{a}_{1-i}^-(\Lambda)$ dans le dual de Pontrjagin de $U_i(\Lambda)/U_j(\Lambda)$ qui à $b + \mathfrak{a}_{1-i}^-(\Lambda)$ associe $\psi_b : x \mapsto \psi \circ \text{tr}_{A/E}(b(x-1))$.

On dit que la strate gauche (Λ, n, r, b) , $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq r < n$, est contenue dans une représentation $(\pi, \mathcal{V})$ de G_N dès que le caractère ψ_b de $U_{r+1}(\Lambda)$ qu'elle définit, est contenu dans $\pi|_{U_{r+1}(\Lambda)}$.

Définition. [St1, déf. 5.3.1] - Une strate gauche (Λ, n, r, b) dans A_N est fondamentale si $r = n - 1$ et son polynôme caractéristique $\varphi_b(X)$ n'est pas une puissance de X .

2.3 Une strate $(\Lambda, n, n - 1, b)$ s'interprète comme un triplet $(x_{\Lambda}, \frac{n}{ee_0}, \beta)$ formé d'un point x_{Λ} de l'immeuble de G_N , d'un rationnel $\frac{n}{ee_0}$ et d'une forme linéaire de $\mathfrak{a}_{-n}'(\Lambda)$, $\beta : X \mapsto \text{trdb}X$. Alors, les filtrations de $U_0(\Lambda)^0$, de $\mathfrak{a}_0^-(\Lambda)$ et de $\mathfrak{a}_0'^-(\Lambda)$ définies dans [MP] sont celles fournies par Λ (2.2 et 1.2) modulo une homothétie de rapport $\frac{1}{ee_0}$ sur les indices [PY, 2.5].

Si en outre, la strate $(\Lambda, n, n - 1, b)$ n'est pas fondamentale, la classe $b + \mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda)$ dans A_N contient un élément nilpotent et par [PY, 5.4, 5.5], il existe $b' \in b + \mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda)$ et λ un groupe à un paramètre défini sur F tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)b'\lambda(t)^{-1} = 0$. La classe $\beta + \mathfrak{a}_{-n+1}'(\Lambda)$ est nilpotente au sens de [MP] et ψ_b est donc dégénéré [MP, 3.8].

On déduit alors cette version du théorème 5.2 de [MP] :

Théorème. - Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation lisse irréductible de G_N . Alors, (cas de niveau strictement positif) $(\pi, \mathcal{V})$ contient une strate gauche fondamentale ou bien

(cas de niveau 0) il existe une chaîne de réseaux autoduale $\mathcal{L}$ telle que $\pi|_{U_0(\mathcal{L})}$ contient une représentation σ triviale sur $U_1(\mathcal{L})$ qui, vue comme représentation de $U_0(\mathcal{L})/U_1(\mathcal{L})$, contient une représentation cuspidale irréductible de $(U_0(\mathcal{L})/U_1(\mathcal{L}))^0$.

Démonstration. - Pour une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux Λ , on pose

$$f(\Lambda, \pi) = \min\{f \in \mathbb{N} : \pi|_{U_{f+1}(\Lambda)} \text{ contient le caractère trivial}\}.$$

Cet entier est bien défini et π contient toujours une strate gauche de la forme $(\Lambda, f(\Lambda, \pi), f(\Lambda, \pi) - 1, b)$.

S'il existe une suite autoduale Λ telle que $f(\Lambda, \pi) = 0$ alors en considérant une chaîne $\mathcal{L}$ (nécessairement autoduale) sous-jacente à Λ , on a aussi $f(\mathcal{L}, \pi) = 0$. Par le théorème 8.9 de [Mor2], on obtient le cas de niveau 0 du théorème.

Supposons que $f(\Lambda, \pi) > 0$ pour toute suite autoduale Λ . Par [MP, th 5.2 (1)] et [PY, 3 et 6], il existe une suite autoduale Λ telle que $\frac{f(\Lambda, \pi)}{e(\Lambda)}$ soit minimal. Notons $f = f(\Lambda, \pi)$ et $(\Lambda, f, f - 1, b)$ une strate gauche contenue dans π . Elle est nécessairement fondamentale par ce qui précède et [MP, 6.2]. $\square$

3. Le niveau 0 : les résultats de L. Morris pour $U(2, 1)(F)$.

On considère une représentation lisse irréductible $(\pi, \mathcal{V})$ de G , de niveau 0. Soit $\mathcal{L}$ et σ comme dans le théorème précédent. Notons, à la suite de L. Morris [Mor3, §4], $P = U_0(\mathcal{L})^0$ un des sous-groupes parahoriques de G , $M = \mathbb{M}(k_F) = U_0(\mathcal{L})^0/U_1(\mathcal{L})$, $\hat{P} = U_0(\mathcal{L})$ le normalisateur de P et $\hat{M} = U_0(\mathcal{L})/U_1(\mathcal{L})$.

On remarque que lorsque E n'est pas ramifiée sur F , $\hat{P} = P$, $\hat{M} = M$ et que ce dernier est isomorphe à $U(2, 1)(k_F)$ ou $U(1, 1)(k_F) \times U(1)(k_F)$ ou un tore maximal de $U(2, 1)(k_F)$ selon que la période de $\mathcal{L}$ est 1, 2, ou 3. Lorsque E est ramifiée sur F , $\hat{M}$ est isomorphe à $O(2, 1)(k_F)$ ou $O(1, 1)(k_F) \times \{\pm 1\}$ ou $k_F^\times \times \{\pm 1\}$ selon que la période de $\mathcal{L}$ est 1, 2, ou 3, M étant alors $\hat{M}^0$.

Proposition. [Mor3] -

- i) La représentation $(\pi, \mathcal{V})$ est supercuspidale si et seulement si P est maximal, c'est-à-dire $e(\mathcal{L}) = 1$ ou 2.
- ii) La paire $(U_0(\mathcal{L}), \sigma)$ est un $\mathfrak{s}$ -type où $\mathfrak{s}$ représente la classe d'inertie de $(\pi, \mathcal{V})$.

En effet, si P est maximal, $(\pi, \mathcal{V})$ est supercuspidale [Mor3, prop. 4.1] et par le théorème 4.7 de [Mor3], $(\hat{P}, \sigma)$ est un $[G, \pi]_G$ -type. Si P n'est pas maximal, autrement dit P est un sous-groupe d'Iwahori, alors $(\hat{P}, \sigma)$ est une paire couvrante de la paire $(\hat{P} \cap L, \sigma|_{\hat{P} \cap L})$ [Mor3, 3.10] où L défini en [Mor3, 2.1] n'est autre que le tore maximal $\mathbb{M}(F)$ de G . Par le théorème 4.9 de [Mor3], $(\hat{P}, \sigma)$ est encore un type pour une seule classe d'inertie $\mathfrak{s}$. Nécessairement, $\mathfrak{s}$ contient π et π n'est pas cuspidale.

Dans toute la suite, les représentations π considérées sont, implicitement, de niveau strictement positif, ainsi que toutes leurs tordues par un caractère de G_N .

4. Strates non scindées et cuspidalité.

4.1 Dans ce paragraphe, $(\pi, \mathcal{V})$ désigne une représentation lisse irréductible de G_N contenant une strate gauche fondamentale non scindée. On s'apprête à prouver

Proposition. - Lorsque N est premier (en particulier, $N = 2$ ou 3), la représentation $(\pi, \mathcal{V})$ contient une strate gauche fondamentale scalaire² ou bien est supercuspidale et induite à partir d'un sous-groupe ouvert compact K de G_N .

²On entend par *strate scalaire* une strate $(\Lambda, m, m - 1, b)$ telle que $b + \mathfrak{a}_{-m+1}^-(\Lambda)$ contienne un scalaire.

Dans le premier cas, il existe un caractère χ de G_N tel que $\pi \otimes \chi$ contienne une strate gauche de niveau strictement inférieur à celui de $(\Lambda, n, n-1, b)$. On reprend alors l'analyse avec $\pi \otimes \chi$.

Dans le deuxième cas, des précisions sur K et la représentation induisante ρ sont données au cours de la démonstration (4.4). Elles seront utiles pour déterminer un $[G_N, \pi]$ -type précis. Notons que (K, ρ) est déjà un $[G_N, \pi]$ -type.

4.2 Passons à la démonstration de la proposition. On commence par établir le résultat suivant.

On rappelle qu'un élément x de $GL_N(E)$ est Λ -inversible si $\nu_\Lambda(x^{-1}) = -\nu_\Lambda(x)$ ou, de manière équivalente, si $x\Lambda(j) = \Lambda(j + \nu_\Lambda(x))$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ [BK4, 3.4].

Lemme. - Soit $(\Lambda, n, n-1, b)$ une strate gauche fondamentale de période e dans A_N . On suppose que b est Λ -inversible. Si $\mathcal{L}$ est une chaîne de réseaux sous-jacente à Λ et $m = -\nu_{\mathcal{L}}(b)$, alors $(\mathcal{L}, m, m-1, b)$ est une strate gauche ayant même niveau et même polynôme caractéristique que $(\Lambda, n, n-1, b)$. De plus, $(\Lambda, n, n-1, b)$ et $(\mathcal{L}, m, m-1, b)$ définissent le même caractère.

Démonstration. - Quitte à composer Λ et $\mathcal{L}$ par des translations, on suppose que $\Lambda(1) \neq \Lambda(0) = \mathcal{L}(0)$.

Considérons l'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\Lambda(i) = \mathcal{L}(\varphi(i))$ pour chaque i . Elle est surjective et $\varphi(0) = 0$. Le point-clé de la démonstration est, en posant $g = \text{pgcd}(n, e)$,

$$(4.2.1) \quad \varphi(i + kg) = \varphi(i) + k\varphi(g) \text{ pour tous } i, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient alors que $\mathcal{L}$ est de période $e' = \varphi(e) = \varphi(\frac{e}{g}g) = \frac{e}{g}\varphi(g)$ et que $\nu_{\mathcal{L}}(b)$ est $-m = -\frac{n}{g}\varphi(g)$. On montre plus généralement que

$$(4.2.2) \quad \mathfrak{a}_{kg}(\Lambda) = \mathfrak{a}_{k\varphi(g)}(\mathcal{L}) \text{ et } \mathfrak{a}_{kg+1}(\Lambda) = \mathfrak{a}_{k\varphi(g)+1}(\mathcal{L}), k \in \mathbb{Z}.$$

Pour ce faire, il suffit d'établir la première égalité, la deuxième s'en déduisant par dualité. On fixe k .

$$x \in \mathfrak{a}_{kg}(\Lambda) \Leftrightarrow x\Lambda(i) \subset \Lambda(i + kg), i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ x\mathcal{L}(\varphi(i)) \subset \mathcal{L}(\varphi(i + kg)) = \mathcal{L}(\varphi(i) + k\varphi(g)), i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathfrak{a}_{k\varphi(g)}(\mathcal{L}).$$

On vérifie alors aisément les autres assertions du lemme.

Revenons à l'égalité (4.2.1). Il suffit de l'établir pour tous les $i \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $k > 0$. On remarque que $\varphi(i + kg) - \varphi(i)$ est le nombre de réseaux L de $\mathcal{L}$ tels que $\mathcal{L}(\varphi(i)) \supsetneq L \supset \mathcal{L}(\varphi(i + kg))$, ou encore celui des réseaux L distincts de Λ tels que $\Lambda(i) \supsetneq L \supset \Lambda(i + kg)$. Or ce nombre s'écrit $\sum_{j=0}^{k-1} (n_{i,j} - 1)$ où $n_{i,j}$ est le nombre d'éléments distincts de $\{\Lambda(i + jg), \dots, \Lambda(i + (j+1)g)\}$. Montrons que $n_{i,j}$ est indépendant de i et j et égal à $\varphi(g) + 1$.

Puisque b est Λ -inversible, il induit un isomorphisme entre $\Lambda(i)/\Lambda(i+1)$ et $\Lambda(i-n)/\Lambda(i-n+1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ainsi, si $\Lambda(i) = \Lambda(i+1)$, $\Lambda(i-n) = \Lambda(i-n+1)$ d'une part, et $\Lambda(i+e) = \Lambda(i+e+1)$ d'autre part. En réitérant, on obtient

$\Lambda(i-un) = \Lambda(i-un+1)$ et $\Lambda(i+ve) = \Lambda(i+ve+1)$ pour tout $u, v \in \mathbb{Z}$ et, par l'identité de Bézout,

- (*) $\Lambda(i) = \Lambda(i + 1) \Leftrightarrow \Lambda(i + kg) = \Lambda(i + kg + 1), k \in \mathbb{Z}$ ou plus gnralement,
 (**) $\Lambda(i) = \Lambda(i + r) \Leftrightarrow \Lambda(i + kg) = \Lambda(i + kg + r), k, r \in \mathbb{Z}$.

Compte tenu de (*), il est clair que $n_{i,j}$ ne dpend que de la classe de i modulo g . On le note donc n_i et on suppose $0 \leq i < g$.

Si $i = 0$, n_0 est le nombre de rseaux de $\mathcal{L}$ compris entre $\mathcal{L}(0)$ et $\mathcal{L}(\varphi(g))$. C'est donc $\varphi(g) + 1$.

Si $i \geq 1$, il suffit de montrer que $n_i = n_0$. Soit $(j_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite croissante d'entiers dfinie par : $j_0 = 0$ et $j \in \{j_k, k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \Lambda(j) \neq \Lambda(j + 1)$. Alors $j_{n_0-1} = g$ et, par (**), $j_{n_0+r} = g + j_{r+1}$ si $0 \leq r < n_0$.

Or $j_{k-1} < i \leq j_k$ pour $1 \leq k < n_0 - 1$ convenable. Ainsi $\Lambda(i) = \Lambda(j_k)$ et par suite, $\Lambda(i + g) = \Lambda(j_k + g) = \Lambda(j_{n_0+k-1})$. D'o $n_i = \#\{j_k, \dots, j_{n_0+k-1}\} = n_0$. $\square$

4.3 On poursuit la dmonstration de (4.1) par le

Lemme. - Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une reprsentation vrifiant les hypothses de (4.1). Alors $(\pi, \mathcal{V})$ contient une strate minimale.

Dmonstration. - Sous les hypothses (4.1), b est ncessairement Λ -inversible [BK4, prop.3.5]. D'aprs le lemme 4.2, la reprsentation π contient une strate gauche fondamentale non scinde $(\mathcal{L}, m, m - 1, b)$ o $\mathcal{L}$ est une chane de rseaux. Par le thorme 5.3.2 de [St1], il existe une strate gauche simple $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ telle que $b + \mathfrak{a}_{-m+1}(\mathcal{L}) \subset b' + \mathfrak{a}_{-m'+1}(\mathcal{L}')$. En particulier, $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b)$ est une strate gauche quivalente $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ et $U_{m'}(\mathcal{L}') \subset U_m(\mathcal{L})$. Par consquent, $\psi_{b'} = \psi_{b|U_{m'}(\mathcal{L})}$ et π contient la strate gauche $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$. $\square$

Dans ce cas, on dira que la strate $(\Lambda, n, n - 1, b)$ se rduit une strate minimale.

Rappelons que la strate $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ de priode e' est *minimale* (ou *simple* [BK1, 1.5.5]) si

- (i) $E[b']$ est un corps dont le groupe multiplicatif normalis $\mathfrak{a}_0(\mathcal{L}')$,
- (ii) $\nu_{\mathcal{L}'}(b') = -m'$,
- (iii) $\text{pgcd}(m', e') = 1$ et $y = \varpi_E^{m'} b'^{e'}$ engendre $k_{E[b']}$ sur k_E .

4.4 On se restreint maintenant au cas o N est premier. Soit $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ une strate gauche minimale contenue dans π et D l'extension $E[b']$.

Si $D = E$, la strate $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ est scalaire et on revient 4.1.

Si $D \neq E$, D est ncessairement une extension de degr N , non ramifie si $\varphi_{b'}$ est irrductible, totalement ramifie sinon. Par le thorme 2.2.3 de [St1], l'entrelacement de $(\mathcal{L}', m', m' - 1, b')$ est gal $U_1(\mathcal{L}')(D^\times \cap G_N)U_1(\mathcal{L}')$.

De plus, l'involution σ de A agit comme un F -automorphisme de D . On note L le sous-corps de D form des lments fixes sous σ : $L = F[\epsilon b']$. Alors $D^\times \cap G_N$ est le groupe des lments de norme 1 de $D|_L$ not $(D|_L)^1$. Comme $(D|_L)^1 \subset D^\times$ normalise $U_1(\mathcal{L}')$, $U_1(\mathcal{L}')(D^\times \cap G_N)U_1(\mathcal{L}') = U_1(\mathcal{L}')(D|_L)^1$ est un sous-groupe ouvert compact de G_N . Donc

(4.4.1) si $D \neq E$, $(\pi, \mathcal{V})$ est supercuspidale et est l'induite compacte d'une reprsentation ρ irrductible du sous-groupe $K := U_1(\mathcal{L}')(D|_L)^1$ contenue dans π et contenant $\psi_{b'}$.

Ceci termine la dmonstration de la proposition 4.1 $\square$

5. Strates scindées et non-cuspidalité.

On s'intéresse maintenant aux représentations lisses irréductibles de G_N contenant une strate fondamentale scindée (au sens "large" de [St1, déf. 5.3.1]).

5.1 Soit $(\pi, \mathcal{V})$ l'une d'entre elles. On note $(\Lambda, n, n-1, b)$ une strate fondamentale scindée contenue dans π . Son polynôme caractéristique $\varphi_b(X)$ est donc de la forme $p_1(X)p_2(X)$ où p_1 et p_2 sont la réduction modulo $\mathfrak{p}_E$ de polynômes unitaires P_i de $\mathfrak{o}_E[X]$ tels que $P_1(X)P_2(X)$ est le polynôme caractéristique de y , noté $\Phi_b(X)$, et sont premiers entre eux modulo $\mathfrak{p}_E$.

Convention : on note par une lettre majuscule un polynôme de $\mathfrak{o}_E[X]$ et par la même lettre minuscule sa réduction modulo $\mathfrak{p}_E$.

Dans la suite, on suppose que $(\Lambda, n, n-1, b)$ vérifie l'hypothèse plus contraignante :

(5.1.1) *il existe une décomposition de V_N en somme orthogonale $V_N = V^1 \perp V^2$ telle que*

- (i) $\Lambda = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2$ où $\Lambda^i(j) = \Lambda(j) \cap V^i$, $j \in \mathbb{Z}$, et Λ^i est autoduale dans V^i , $i = 1, 2$;
- (ii) $b = b_1 \oplus b_2$ où $b_i \in \mathfrak{g}^i$;
- (iii) b_1 est Λ^1 -inversible et $\nu_{\Lambda^1}(b_1) = -n$ tandis que $b_2 \in \text{End} V^2$ est, ou bien Λ^2 -inversible avec $\nu_{\Lambda^2}(b_2) = -n$, ou bien nul.

On obtient une hypothèse équivalente en remplaçant la condition (i) par $\Lambda = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2$ (1.4).

Lemme. - *Quand $N = 3$, il existe un caractère χ de G tel que $\pi \otimes \chi$ contienne une strate gauche fondamentale scindée au sens (5.1.1).*

Démonstration. - Soient $(\Lambda, n, n-1, b)$ une strate fondamentale scindée au premier sens, $P_i(X)$, $i = 1$ ou 2 , comme ci-dessus et $y \in \mathfrak{a}_0^\eta(\Lambda)$ ($\eta = \pm$) comme en 2.1.

On choisit ces polynômes de façon que $\text{Ker } P_1(y)$ ou $\text{Ker } P_2(y)$ ne soit pas isotrope. Ceci est possible pour la raison suivante.

Si $\text{Ker } P_1(y)$ et $\text{Ker } P_2(y)$ sont isotropes, on pose $W^1 = \text{Ker } P_1(y) \cap \text{Ker } P_1(y)^\perp$. C'est un sous-espace vectoriel totalement isotrope stable par y . Comme $y^\sigma = \eta y$, y stabilise aussi l'orthogonal $W^{1\perp}$. Par conséquent, dans la décomposition de V_N en

$$V_N = W^1 \oplus W^0 \oplus W^{-1} \quad \text{où } W^0 \text{ est un supplémentaire non isotrope de } W^1 \text{ dans } W^{1\perp} \text{ et } W^{-1} \text{ est un supplémentaire de } W^1 \text{ dans } W^{0\perp},$$

y est triangulaire supérieur. En notant y_i , $-1 \leq i \leq 1$, les termes diagonaux, le polynôme caractéristique Φ de y vaut $Q_1(X)Q_2(X)$ avec $Q_1(X) = (X - y_1)(X - y_{-1})$ et $Q_2(X) = (X - y_0)$.

La relation $y^\sigma = \eta y$ implique que $y_{-i} = \eta \bar{y}_i$ pour $i = 0$ ou 1 . Comme φ_b possède (au moins) deux facteurs premiers distincts, les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux ainsi que q_1 et q_2 (modulo $\mathfrak{p}_E$) : Q_i , q_i , $i = 1, 2$, satisfont donc les conditions 5.1 et $\text{Ker } Q_1(y) = W^1 \oplus W^{-1}$ est non isotrope.

Ceci fait, on pose $V^1 = \text{Ker } P_1(y)$, $V^2 = V^{1\perp}$ et $y_i = \text{pr}_i \circ y|_{V^i} \in \text{End}_E V^i$ où pr_i est la projection orthogonale sur V^i . Le polynôme caractéristique de y_1 est P_1 et, par suite, celui de y_2 est P_2 : $V^2 = \text{Ker } P_2(y)$. On a donc $V = \text{Ker } P_1(y) \perp \text{Ker } P_2(y)$ et par [Ku, lemme 3.5], les conditions 5.1.1, (i) et (ii) sont satisfaites.

Pour établir le lemme, il reste à étudier la condition (iii). On note $n_i = -\nu_{\Lambda^i}(b_i)$. Le lemme 3.6 de [BK4] affirme que n_1 ou n_2 est égal à n .

Cas 1 : X ne divise pas φ_b . Alors $n_1 = n_2 = n$ encore par [BK4, lemme 3.6] donc $\varphi_{b_i}(X)$ est $p_i(X)$. Comme X ne divise pas p_i , b_i est Λ^i -inversible [BK4, prop. 3.5].

Cas 2 : X divise φ_b . On précise le choix des P_i et p_i . On écrit $\varphi_b(X) = p_1(X)p_2(X)$ où $p_1(X)$ non divisible par X et $p_2(X)$ une puissance de X puis on définit P_1 et P_2 comme en 5.1. Le sous-espace $V^2 := \text{Ker } P_2(y)$ n'est pas isotrope sinon la puissance de X dans φ_b est strictement supérieure à $\dim V^2$ et X divise p_1 .

Nécessairement $n_1 = n$ (sinon $n_2 = n$, $\varphi_{b_2}(X) = X^{\dim V^2}$ et donc [BK4, lemme 3.6] $\varphi_b(X)$ est une puissance de X) et b_1 est Λ^1 -inversible. Si $\dim V^2 = 1$, b_2 est scalaire : $n_2 > n$ nécessairement. Si $\dim V^2 = 2$, b_1 est scalaire. Soit χ un caractère de G prolongeant $\psi_{-b_1 \text{id}}$. La représentation $\pi \otimes \chi$ contient la strate $(\Lambda, n, n-1, 0 \oplus (b_2 - b_1 \text{id}))$ scindée au sens (5.1.1). $\square$

Remarque. - Si $N = 2$, pour qu'une strate scindée au sens "large" le soit aussi au sens (5.1.1), il suffit que $\text{Ker } P_i(y)$ ne soit pas isotrope pour $i = 1$ ou 2 . Cela résulte de la démonstration précédente.

5.2 On reprend les notations de (5.1). On suppose de plus que la strate $(\Lambda, n, n-1, b)$ contenue dans π est scindée au sens de (5.1.1). Elle vérifie alors toutes les hypothèses de [BK4, 3.6].

On définit des $\mathfrak{o}_E$ -réseaux dans A_N stables sous σ (cf. 1.6.2) :

(5.2.1)

$$\mathfrak{h}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_n^{11}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}^{21}(\Lambda) & \mathfrak{a}_n^{22}(\Lambda) \end{pmatrix}, \mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{n+1}^{11}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}^{21}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{n+1}^{22}(\Lambda) \end{pmatrix}, \mathfrak{j}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_n^{11}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{[\frac{n+1}{2}]}^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{n+1}{2}]}^{21}(\Lambda) & \mathfrak{a}_n^{22}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

ainsi que $H_i = (1 + \mathfrak{h}_i) \cap G_N$, $i = 1$ ou 2 , et $J_1 = (1 + \mathfrak{j}_1) \cap G_N$. En remarquant que $\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{a}_{n+1}(\Lambda) \subset \mathfrak{h}_2$ et $\mathfrak{j}_1 \cdot \mathfrak{j}_1 \subset \mathfrak{a}_n(\Lambda) \subset \mathfrak{h}_1$, on montre de façon classique (voir par exemple [Mor1, §2]) les résultats suivants :

Lemme. -

(i) Les ensembles H_i et J_1 sont des sous-groupes ouverts compacts de G_N . De plus, H_1 et H_2 sont distingués dans J_1 .

(ii) L'application $x \mapsto 1 + x$ induit un isomorphisme entre $\mathfrak{h}_1^-/\mathfrak{h}_2^-$ et H_1/H_2 d'une part, $\mathfrak{j}_1^-/\mathfrak{h}_1^-$ et J_1/H_1 d'autre part.

(iii) On a : $\mathfrak{h}_1^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{1-n}^{11}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{-[\frac{n}{2}]}^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_{-[\frac{n}{2}]}^{21}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{1-n}^{22}(\Lambda) \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{h}_2^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{-n}^{11}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{-[\frac{n}{2}]}^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_{-[\frac{n}{2}]}^{21}(\Lambda) & \mathfrak{a}_{-n}^{22}(\Lambda) \end{pmatrix}$.

L'élément b appartient à $\mathfrak{h}_2^+$ et définit donc un caractère de H_1 encore noté ψ_b .

Proposition. - L'entrelacement dans G_N du caractère ψ_b de H_1 est

$$\mathcal{E}_{G_N}(\psi_b|H_1) = J_1(\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2}))J_1.$$

où $\mathcal{E}_{G^i}(\psi_{b_i})$ désigne l'entrelacement dans $G^i = U(V^i)$ du caractère ψ_{b_i} de $U_n(\Lambda^i)$.

On admet ce résultat jusqu'en (5.8) et on revient à l'étude de la représentation $(\pi, \mathcal{V})$ (5.1).

5.3 La représentation π contient le caractère ψ_b de $U_n(\Lambda)$. Or le quotient $H_1/U_{n+1}(\Lambda)$ étant abélien, π contient un caractère de H_1 prolongeant ψ_b . Ce caractère est de la forme $\psi_{b'}$ avec $b' \in \mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda)$, défini modulo $\mathfrak{h}_1^\dagger$ et $b' \equiv b \pmod{\mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda)}$.

Lemme. - *Il existe un élément $g \in U_1(\Lambda)$ tel que la conjuguée de π par g contienne le caractère ψ_b de H_1 .*

Démonstration. - On détermine $g \in U_1(\Lambda)$ par récurrence : on pose $g_0 = \text{id}$ et pour $i \geq 1$, $g_i = (1 + \Gamma_i)g_{i-1} \in U_1(\Lambda)$ tel que

$$(a) \Gamma_i \in \mathfrak{a}_i(\Lambda) \text{ et } \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(\gamma_i) \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}_{2i}(\Lambda)} \text{ où } \gamma_i \in \mathfrak{a}_i^{21}(\Lambda);$$

$$(b) g_i b' g_i^{-1} = b \pmod{\mathfrak{a}_{-n+i+1}^-(\Lambda)}.$$

Alors $g = g_{[\frac{n+1}{2}]}$ convient : ${}^g\pi|_{H_1}$ contient ${}^g\psi_{b'} = \psi_b$.

L'hypothèse est clairement vérifiée pour $i = 0$. Fixons $i \geq 1$. Quitte à remplacer b' par $g_{i-1} b' g_{i-1}^{-1}$, l'hypothèse s'écrit :

$$b' = b \pmod{\mathfrak{a}_{-n+i}^-(\Lambda)}, \text{ c'est-à-dire que } b' = b + \begin{pmatrix} 0 & -\tau(\beta) \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathfrak{a}_{-n+i}^{21}(\Lambda).$$

L'application $x \mapsto b'x - xb'$ définie sur $\mathfrak{a}_i^-(\Lambda)$, à valeurs dans $\mathfrak{a}_{-n+i}^-(\Lambda)/\mathfrak{a}_{-n+i+1}^-(\Lambda)$, a même image que $x \mapsto bx - xb$. De plus, sa restriction à $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{a}_i^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_i^{21}(\Lambda) & 0 \end{pmatrix} \cap \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a}_i^{21}(\Lambda)$ donnée par $\begin{pmatrix} 0 & -\tau(x) \\ x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\tau(b_2x - xb_1) \\ b_2x - xb_1 & 0 \end{pmatrix}$ est surjective [BK4, 3.7]. Il existe donc $\gamma_i \in \mathfrak{a}_i^{21}(\Lambda)$ tel que $b' \begin{pmatrix} 0 & -\tau(\gamma_i) \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\tau(\gamma_i) \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix} b' = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(\beta) \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}_{-n+i+1}^-(\Lambda)}$.

On construit alors $\Gamma_i \in \mathfrak{a}_i(\Lambda)$ vérifiant (a) et $\Gamma_i + \Gamma_i^\sigma + \Gamma_i \Gamma_i^\sigma = 0$. Comme précédemment, on définit par récurrence une suite d'éléments (y_j) telle que $y_0 = \gamma_i$, $y_j \in \mathfrak{a}_{(j+1)i}^+(\Lambda)$ et $(y_0 - \sum_{k=1}^j y_k) + (y_0 - \sum_{k=1}^j y_k)^\sigma + (y_0 - \sum_{k=1}^j y_k)(y_0 - \sum_{k=1}^j y_k)^\sigma \in \mathfrak{a}_{(j+2)i}(\Lambda)$. Alors la suite $(\sum_{k=1}^j y_k)_j$ a une limite y dans $\mathfrak{a}_{2i}(\Lambda)$ quand j tend vers l'infini. On pose $\Gamma_i = \gamma_i - y$. Il vérifie (a) et $1 + \Gamma_i$ est un élément de $U_i(\Lambda)$. Par suite $g_i \in U_1(\Lambda)$ et satisfait (b). $\square$

On poursuit donc en supposant que π contient ψ_b en tant que caractère de H_1 .

5.4 Supposons, momentanément, que $J_1 \neq H_1$ (en particulier n est pair).

Lemme. -

(i) *Le groupe J_1/H_2 est une extension centrale du groupe abélien J_1/H_1 par le groupe abélien H_1/H_2 .*

(ii) *L'application $(x, y) \mapsto \psi_b(xyx^{-1}y^{-1})$, de $J_1/H_1 \times J_1/H_1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, définit un accouplement non dégénéré sur J_1/H_1 .*

(iii) *Il existe une unique représentation irréductible $\eta(\psi_b)$ de J_1 dont la restriction à H_1 contienne ψ_b . Elle est de dimension $|J_1/H_1|^{\frac{1}{2}}$ et sa restriction à H_1 est multiple de ψ_b .*

Dans ce cas, π contient la représentation $\eta(\psi_b)$ de J_1 .

Démonstration du lemme. -

On a clairement la suite exacte : $1 \rightarrow H_1/H_2 \rightarrow J_1/H_2 \rightarrow J_1/H_1 \rightarrow 1$.

De plus, si $(1+x), (1+y) \in J_1$,

$$(*) \quad [1+x, 1+y] = (1+x)(1+y)(1+x)^{-1}(1+y)^{-1} = 1 + xy + x^\sigma y^\sigma + xy^\sigma + yx^\sigma \pmod{\mathfrak{h}_2}.$$

Donc si $(1+x) \in H_1$ alors $[1+x, 1+y] = 1 \pmod{\mathfrak{h}_2}$ et l'assertion (i) est démontrée.

On déduit aussi de (*) que $[1 + x, 1 + y] \in H_1$ puisque $j_1 \cdot j_1 \subset \mathfrak{h}_1$. L'application de (ii) est donc bien définie. Montrons que c'est un accouplement non dégénéré.

On sait que $1 + x = 1 + x' + x''$ avec $x' \in j_1^-$ et $x'' \in \mathfrak{h}_1^+$ et de même pour tout élément de J_1 . En utilisant (*), on trouve

$$\psi_b([1 + x, 1 + y]) = \psi \circ \text{tr}(bx' - x'b)y'.$$

Par conséquent, si $1 + x \in J_1$ est tel que $\psi_b([1 + x, 1 + y]) = 1$ pour tout $1 + y \in J_1$ alors $bx' - x'b \in j_1^* \cap \mathfrak{g}_N = j_1^* \cap \mathfrak{g}_N$ ce qui implique, en écrivant $x = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, $x_{ij} \in j_1 \cap A_W^{ij}$,

$$b_i x_{ij} - x_{ij} b_j \in \mathfrak{a}_{1 - [\frac{n+1}{2}]}^{ij}(\Lambda) \text{ pour } i \neq j$$

d'où, grâce au lemme 1 de [BK4, 3.7], $x_{ij} \in \mathfrak{a}_{1 + [\frac{n}{2}]}^{ij}(\Lambda)$. Ceci suffit pour que $1 + x \in J_1$ soit un élément de H_1 . On a ainsi établi l'assertion (ii).

La dernière assertion est une conséquence standard des deux premières (cf. par ex. [Ca, 5.2]). $\square$

En résumé, que J_1 soit ou non égal à H_1 ,

(5.4.1) $(\pi, \mathcal{V})$ contient une représentation irréductible η_b de J_1 dont la restriction à H_1 est un multiple de ψ_b et dont l'entrelacement est égal à $J_1(\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2}))J_1$. Elle est de dimension $|J_1/H_1|^{\frac{1}{2}}$.

5.5 On poursuit l'analyse dans le cas de $G = U(2, 1)(F)$. On conserve les notations des paragraphes précédents.

Quitte à tordre π par un caractère de G , on peut supposer

$$\dim V^1 = 2, \quad \dim V^2 = 1, \quad b_1 \text{ est } \Lambda^1\text{-inversible et } b_2 = 0.$$

Le groupe G^2 est alors $U(1)(F) \simeq E^1$ et $\mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2}) = G^2$. L'étude de π dépend essentiellement de la "nature" de la strate (nécessairement) fondamentale $(\Lambda^1, n, n - 1, b_1)$ de $\text{End}_E V^1$. On obtient immédiatement :

Corollaire. - Si $G^1 \simeq U(2)(F)$, la représentation π est supercuspidale.

5.6 Dans ce paragraphe et le suivant, G^1 est $U(1, 1)(F)$. L'application $x \mapsto \langle x, x \rangle$ définie sur V^2 est à valeurs dans $N_{E|F}(E^\times)$ et l'unique chaîne de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux dans V^2 est engendrée par un réseau égal à son dual.

Puisque b_1 est Λ^1 -inversible, le caractère ψ_{b_1} de $U_n(\Lambda^1)$ est aussi défini par la strate gauche $(\mathcal{L}_{\Lambda^1}, \frac{ne(\mathcal{L}_{\Lambda^1})}{e}, \frac{ne(\mathcal{L}_{\Lambda^1})}{e} - 1, b_1)$ où $\mathcal{L}_{\Lambda^1}$ désigne la chaîne sous-jacente à Λ^1 (lemme 4.2). On note $n_1 = \frac{ne(\mathcal{L}_{\Lambda^1})}{e}$.

Lemme. - La représentation π contient une strate gauche $(\Lambda', n', n' - 1, b'_1 \oplus 0)$ scindée au sens (5.1.1) telle que $e(\Lambda')$ divise $n'e(\mathcal{L}_{\Lambda^1})$ et $(\mathcal{L}_{\Lambda'^1}, \frac{n'e(\mathcal{L}_{\Lambda^1})}{e(\Lambda')}, \frac{n'e(\mathcal{L}_{\Lambda^1})}{e(\Lambda')} - 1, b'_1)$ est minimale ou scindée (au sens large).

Démonstration. - Etudions le seul cas non immédiat, celui où le polynôme caractéristique φ_{b_1} est une puissance d'un polynôme irréductible.

La strate $(\mathcal{L}_{\Lambda^1}, n_1, n_1 - 1, b_1)$ se réduit à une strate gauche minimale $(\mathcal{L}^1, m, m - 1, b'_1)$ telle que $b_1 + \mathfrak{a}_{-n_1+1}(\mathcal{L}_{\Lambda^1}) \subset b'_1 + \mathfrak{a}_{-m+1}(\mathcal{L}^1)$. De plus, $\mathcal{L}^1$ contient tous les réseaux de

$\mathcal{L}_{\Lambda^1}$ et $(\mathcal{L}^1, m, m-1, b'_1)$ a même niveau que $(\Lambda^1, n, n-1, b_1)$ (théorème 5.3.2 de [St1]). On note e_1 la période de $\mathcal{L}^1$.

Si $\mathcal{L}_{\Lambda^1} = \mathcal{L}^1$ (en particulier si $e_1 = 2 = \dim V^1$), $n_1 = m$ et la strate $(\Lambda, n, n-1, b'_1 \oplus 0)$ est équivalente à $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$: elle vérifie les conditions du lemme.

Sinon on considère la suite $\Lambda' = 2\mathcal{L}^1 \perp 2e_1\mathcal{L}^2$ où $\mathcal{L}^2$ est la chaîne sous-jacente à Λ^2 ($\Lambda^2 = e\mathcal{L}^2$). Elle est autoduale (1.5) et de période $e' = 2e_1$. De plus $\nu_{\Lambda'}(b'_1 \oplus 0) = \nu_{2\mathcal{L}^1}(b'_1) = -2\frac{n}{e}e_1$ ($\frac{n}{e} \in \mathbb{N}^*$) et $(\Lambda', 2\frac{n}{e}e_1, 2\frac{n}{e}e_1 - 1, b'_1 \oplus 0)$ forme une strate gauche autoduale de $\text{End}_E V$ de niveau $\frac{n}{e}$. On pose $n' = 2\frac{n}{e}e_1$.

Montrons que $(\Lambda', n', n'+1, b'_1 \oplus 0)$ est contenue dans π .

Il est immédiat que $b_1 \oplus 0 \in \mathfrak{a}_{-n'}^-(\Lambda')$ et $b_1 \oplus 0 \equiv b'_1 \oplus 0 \pmod{\mathfrak{a}_{-n'+1}^-(\Lambda')}$. Pour que $(\Lambda', 2\frac{n}{e}e_1, 2\frac{n}{e}e_1 - 1, b'_1 \oplus 0)$ soit contenue dans π , il suffit que $\mathfrak{a}_{n'}(\Lambda') \subset \mathfrak{a}_n(\Lambda)$ ou, puisque $\frac{n}{e} = \frac{n'}{e'} \in \mathbb{N}^*$, que chaque réseau de Λ appartienne à Λ' .

Soit L un réseau de Λ . Quitte à le multiplier par une puissance de l'uniformisante, on peut supposer que $\varpi L \subset L^\# \subsetneq \varpi^{-1}L$ donc $\varpi L^i \subset L^{i\#} \subsetneq \varpi^{-1}L^i$ pour $i = 1, 2$ ($L^i = L \cap V^i$).

Quand $i = 2$, on en déduit que $L^{2\#} = L^2$ et la suite $\mathcal{L}^2$ ne peut être que $\{\varpi^k L^2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Quand $i = 1$, on en déduit que le réseau L^1 est un réseau $\mathcal{L}^1(j)$ pour un $j \in \mathbb{Z}$ tel que $-\left[\frac{e_1-d_1}{2}\right] \leq j < \left[\frac{e_1+d_1+1}{2e_1}\right]$ ou pour $j = \frac{e_1+d_1}{2}$ si $e_1 + d_1$ est pair.

En effectuant $\Lambda' = 2\mathcal{L}^1 \perp 2e_1\mathcal{L}^2$, on obtient que

$$\Lambda'(k) = \mathcal{L}^1 \left(\left[\frac{k+d_1}{2} \right] \right) \oplus \varpi^{\left[\frac{k+e_1-1}{2e_1} \right]} L^2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

En prenant $k = 2j - d_1 + 1$ si $e_1 + d_1$ est pair et $j \neq \frac{e_1+d_1}{2}$, et $k = 2j - d_1$ sinon, on trouve $\Lambda'(k) = L$. $\square$

Corollaire. - Si la strate gauche $(\Lambda^1, n, n-1, b_1)$ se réduit en une strate minimale non scalaire ou scindée au sens (5.1.1), la représentation π est supercuspidale.

Démonstration. - Sous ces hypothèses, on peut supposer que $(\Lambda^1, n, n-1, b_1)$ est elle-même minimale non scalaire ou scindée au sens (5.1.1). Alors, $\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1})$ est contenu dans $U_0(\Lambda)$ (remarque A.3). Par (5.4.1), l'entrelacement $\mathcal{E}_G(\psi_b)$ est compact et π est donc supercuspidale. $\square$

5.7 Il reste donc à étudier les cas où V^1 est muni d'une forme hermitienne d'indice 1 et où b_1 est diagonal dans une base de Witt (u_{-1}, u_1) adaptée à Λ^1 : $b_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ (cf. dém. A.3.ii). Alors b est lui-même diagonal dans la base de Witt (u_{-1}, u_0, u_1) , adaptée à Λ . Nécessairement, $e(\Lambda)$ divise n : on peut supposer que Λ est une chaîne. Soit $\mathcal{L}$ la chaîne de période 3 contenant tous les réseaux de Λ . La strate $(\mathcal{L}, \frac{3n}{e(\Lambda)}, \frac{3n}{e(\Lambda)} - 1, b_1 \oplus 0)$ est contenue dans π et vérifie les mêmes hypothèses que $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$.

On suppose donc que $\Lambda = \mathcal{L}$ et on écrit $n = 3k$, $k > 0$.

Soit L le sous-groupe de Levi de G stabilisant chaque Eu_i .

Lemme. - $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ est L -scindée [Le, §3] si et seulement si son polynôme caractéristique possède trois racines distinctes.

Démonstration. - On regarde $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ sous la forme $\Theta = (x_{\mathcal{L}}, \frac{n}{3e_0}, \beta)$ (2.3) et on reprend les notations de [Le, §3]. Le tore déployé maximal de G s'identifiant à

$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in F^\times \right\}$ dans la base (u_{-1}, u_0, u_1) est aussi un tore maximal déployé de L : les conditions (i) et (ii) de [Le, §3] sont satisfaites.

Calculons $\mathcal{R}_\Theta$ [Le, §3] : $\mathcal{R}_\Theta = \{\bar{X}, X \in \mathfrak{a}_0^-(\mathcal{L}) \text{ et } a_\beta(X) \in \varpi_F \mathfrak{a}_{-n}'(\mathcal{L})\}$ où $a_\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est donnée par : $X \mapsto (Y \mapsto \beta(XY - YX))$ et $\bar{X}$ est l'image de X par la surjection canonique sur $\mathfrak{a}_0^-(\Lambda)/\varpi_F \mathfrak{a}_0^-(\Lambda)$.

D'où $\mathcal{R}_\Theta = \{\bar{X}, X \in \mathfrak{a}_0^-(\mathcal{L}) \text{ et } bX - Xb \in \varpi_F \mathfrak{a}_{-n}^-(\mathcal{L})\}$ et, en effectuant $bX - Xb$, on obtient que la condition (iii) est vérifiée si et seulement si λ_{-1}, λ_1 et $\lambda_{-1} - \lambda_1$ ne sont pas éléments de $\mathfrak{p}_E^{-k+1}$. $\square$

Ainsi, par [Le, §5],

(5.7.1) *si π contient la strate $(\mathcal{L}, n, n-1, b_1 \oplus 0)$ où b_1 n'est pas scalaire, π ne peut être supercuspidale.*

Examinons le cas où π contient un caractère $\psi_{b_1 \oplus 0}$ où b_1 est scalaire (lorsque E est ramifiée, il correspond au cas où k est impair). On tord alors π par un caractère de G afin qu'elle contienne un caractère de la forme $\psi_{0 \oplus b_2}$ avec b_2 un élément $\mathcal{L}^2$ -inversible de valuation $\nu_{\mathcal{L}^2}(b_2)$ égale à $-n$, puis on considère, pour toute chaîne autoduale $\mathcal{N}$ contenue dans $\mathcal{L}$ de période e , les sous-groupes ouverts compacts de G

$$(5.7.2) \quad J(\mathcal{N}) = (1 + \mathfrak{j}(\mathcal{N})) \cap G \text{ avec } \mathfrak{j}(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{(k-1)e+1}(\mathcal{N}^1) & \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{12}(\mathcal{N}) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{21}(\mathcal{N}) & \mathfrak{a}_{(k-1)e+1}(\mathcal{N}^2) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } K_1(\mathcal{N}) = (1 + \mathfrak{k}_1(\mathcal{N})) \cap G, \quad K(\mathcal{N}) = \mathfrak{k}(\mathcal{N}) \cap G \text{ avec}$$

$$\mathfrak{k}_1(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{ke}(\mathcal{N}^1) & \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{12}(\mathcal{N}) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{21}(\mathcal{N}) & \mathfrak{a}_{ke+1}(\mathcal{N}^2) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_0(\mathcal{N}^1) & \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{12}(\mathcal{N}) \\ \mathfrak{a}_{[\frac{k}{2}] + 1}^{21}(\mathcal{N}) & \mathfrak{a}_0(\mathcal{N}^2) \end{pmatrix}.$$

Prenons d'abord, $\mathcal{N} = \mathcal{L}$. Alors, $K_1(\mathcal{L})$ est un sous-groupe distingué de $J(\mathcal{L})$ contenu dans le noyau de $\psi_{b'}$ et le quotient $J(\mathcal{L})/K_1(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathfrak{j}^-(\mathcal{L})/\mathfrak{k}_1^-(\mathcal{L})$ (puisque $\mathfrak{j}(\mathcal{L}) \cdot \mathfrak{j}(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{k}_1(\mathcal{L})$) ou à $\mathfrak{a}_{n-2}^-(\mathcal{L}^1)/\mathfrak{a}_n^-(\mathcal{L}^1) \times \mathfrak{a}_{n-2}^-(\mathcal{L}^2)/\mathfrak{a}_{n+1}^-(\mathcal{L}^2)$ ou encore à $\mathfrak{a}_{2k-1}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1})/\mathfrak{a}_{2k}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}) \times \mathfrak{a}_k^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^2})/\mathfrak{a}_{k+1}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^2})$ en remplaçant chaque $\mathcal{L}^i$ par sa chaîne sous-jacente.

La représentation π contient donc par restriction à $J(\mathcal{L})$ un caractère prolongeant $\psi_{b'}$. Ce dernier est de la forme $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ où $b'_1 \in \mathfrak{a}_{1-2k}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1})/\mathfrak{a}_{2-2k}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1})$.

Lemme a. - *On suppose E non ramifiée sur F .*

i) *La représentation π est supercuspidale dans les cas suivants :*

- (1) $k \geq 1$. La strate $(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}, 2k-1, 2(k-1), b'_1)$ est fondamentale dans A^1 . Elle est nécessairement minimale non scalaire et l'extension $E[b'_1]$ est ramifiée sur E .
- (2) $k = 1$. La strate $(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}, 2k-1, 2(k-1), b'_1)$ n'est pas fondamentale dans A^1 et il existe une chaîne $\mathcal{N}$ autoduale contenue dans $\mathcal{L}$ telle que π contienne une représentation ρ irréductible de $K(\mathcal{N})$, triviale sur $K_1(\mathcal{N})$, contenant $\psi_{b'|J(\mathcal{N})}$ et qui, vue comme représentation de $K(\mathcal{N})/K_1(\mathcal{N}) \simeq U_0(\mathcal{N}^1)/U_1(\mathcal{N}^1) \times U_0(\mathcal{N}^2)/U_1(\mathcal{N}^2)$ est cuspidale (au sens des représentations des groupes réductifs finis). L'entrelacement de ρ dans G est $K(\mathcal{N})$.

ii) *Dans les autres cas, π n'est pas supercuspidale.*

Démonstration. - La preuve du deuxième point consiste à construire un type induit contenu dans π . Elle utilise les faits, notations et résultats du §7 : on la trouvera donc en 7.6.

Examinons le premier point. Dans le cas (1), puisque $(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}, 2k-1, 2(k-1), b'_1)$ forme une strate fondamentale et que $\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}$ est de période 2, elle est clairement minimale non scalaire. Par suite, $\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b'_1})$ est compact ([St1, th. 2.2.3]). Or $\mathcal{E}_G(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}) \subset \mathcal{E}_G(\psi_{b'}) = J_1(G^1 \times G^2)J_1$ (5.4) et $\mathcal{E}_{G^1 \times G^2}(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}) = \mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b'_1}) \times E^1$. Ainsi, $\mathcal{E}_G(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2})$ est formé de double-classes modulo $J(\mathcal{L})$ contenues dans un compact : $\mathcal{E}_G(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2})$ est lui-même compact et π est supercuspidale.

Dans le cas (2), notons $\rho_1 \otimes \rho_2$ la représentation donnée par l'énoncé et contenue dans $\pi|_{K(\mathcal{N})}$. Calculons son entrelacement $\mathcal{E}_G(\rho_1 \otimes \rho_2)$ dans G . Puisque $J(\mathcal{N})$ est distingué dans $K(\mathcal{N})$, $\mathcal{E}_G(\rho_1 \otimes \rho_2)$ est contenu dans $\mathcal{E}_G(\psi_{b'})$ donc dans $K(\mathcal{N})(G^1 \times G^2)K(\mathcal{N})$. Par le même raisonnement que précédemment, il suffit alors de montrer que $\mathcal{E}_{G^1}(\rho_1)$ est compact.

Prenons $g_1 \in G^1$. Puisque $U_0(\mathcal{N}^1)$ contient un sous-groupe d'Iwahori, la décomposition de Bruhat-Tits de G^1 permet de choisir g_1 dans le groupe de Weyl affine W^1 de G^1 . Ce dernier est formé des puissances de $\xi_1 = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix}$, de $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et des produits des deux. L'hypothèse de cuspidalité sur ρ_1 assure que ρ_1 ne contient pas la représentation triviale par restriction aux matrices unipotentes inférieures, resp. supérieures, modulo $U_1(\mathcal{N}^1)$. Alors, par un simple calcul, on obtient que seuls les éléments de W^1 contenus dans $U_0(\mathcal{N}^1)$ appartiennent à $\mathcal{E}_{G^1}(\rho_1)$: $\mathcal{E}_{G^1}(\rho_1) = U_0(\mathcal{N}^1)$ et par suite, $\mathcal{E}_G(\rho)$ est égal à $K(\mathcal{N})$. $\square$

Quand E est ramifiée sur F , la strate $(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}, 2k-1, 2(k-1), b'_1)$ n'est jamais fondamentale et $b'_1 + \mathfrak{a}_{2(k-1)}^-(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1})$ est contenu dans $\varpi^{-k+1}\mathfrak{a}_0(\mathcal{N}^1)$ où $\mathcal{N}$ désigne la chaîne autoduale de période 2 formée de réseaux de $\mathcal{L}$. Le sous-groupe $K_1(\mathcal{N})$ défini en (5.7.2) est contenu dans le noyau de $\psi_{b'}$.

Si $k = 1$, la restriction de π à $K(\mathcal{N})$ possède une composante irréductible triviale sur $K_1(\mathcal{N})$ de la forme $\rho_1 \otimes \rho_2$ où ρ_i est une représentation irréductible de $U_0(\mathcal{N}^i)/U_1(\mathcal{N}^i)$, $i = 1, 2$.

Si $k > 1$, on introduit le sous-groupe compact ouvert $J(\mathcal{N})$ défini par :

$$(5.7.3) \quad J(\mathcal{N}) = (1 + \mathfrak{j}(\mathcal{N})) \cap G \text{ et } \mathfrak{j}(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{2(k-1)}(\mathcal{N}^1) & \mathfrak{a}_{k+1}^{12}(\mathcal{N}) \\ \mathfrak{a}_{k+1}^{21}(\mathcal{N}) & \mathfrak{a}_{2k}(\mathcal{N}^2) \end{pmatrix}.$$

Or $J(\mathcal{N})/K_1(\mathcal{N})$ est abélien, isomorphe à $U_{2(k-1)}(\mathcal{N}^1)/U_{2k}(\mathcal{N}^1) \times U_{2k}(\mathcal{N}^2)/U_{2k+1}(\mathcal{N}^2)$, π contient un caractère de $J(\mathcal{N})$ que l'on écrit encore $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ bien que $\psi_{b'_1}$ soit maintenant un caractère du premier facteur.

Lemme b. - *On suppose E ramifiée sur F . La représentation π est supercuspidale si et seulement si*

- (1) $k > 1$ et la strate $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}^1}, k-1, k-2, b'_1)$ est minimale et non scalaire;
- (2) $k = 1$ et la représentation ρ_1 est cuspidale. De plus, son entrelacement est égal à $U_0(\mathcal{N}^1)$.

Démonstration. - La nécessité des conditions découle d'un calcul de types induits effectué au paragraphe 7.6 tandis que la suffisance et la formule de l'entrelacement s'établissent comme dans le lemme précédent. $\square$

5.8 Démonstration de la proposition (5.2).

La méthode est celle développée par S. Stevens [St1, 2.2]. Elle consiste à calculer l'entrelacement de ψ_b dans $GL(V_N)$, noté $\mathcal{E}$, puis $\mathcal{E} \cap G_N$, une fois établie l'égalité $\mathcal{E}_{G_N}(\psi_b) = \mathcal{E} \cap G_N$.

Cette dernière égalité est, mutatis mutandis, démontrée dans [St1, 2.2.3].

Intéressons-nous au calcul de $\mathcal{E}$. Tout d'abord, montrons que

$$(5.8.1) \quad \mathcal{E} \subset (1 + \mathfrak{j}_1)\mathcal{E}_M(1 + \mathfrak{j}_1),$$

où $\mathcal{E}_M$ est l'entrelacement de $\psi_{b_1} \otimes \psi_{b_2}$ dans $M = GL(V^1) \times GL(V^2)$.

On généralise la proposition de [BK4, 3.7] en

Lemme. - Soient $c \in \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda) \cap A^{21}$ et $\delta_c : A^{12} \rightarrow A^{12}$, $\delta_c(x) = b_1x - xb_2 + cxx$. Alors $\delta_c(\mathfrak{a}_{n-r}(\Lambda) \cap A^{12}) = \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda) \cap A^{12}$ pour $0 \leq r < n$.

La démonstration reste identique à celle de la proposition sus-citée. Pour prouver l'inclusion (5.8.1), on prend $r = [\frac{n}{2}]$ et on déduit comme [BK4, 3.7 lemme 3] que :

Lemme. - Si $x = b + x'$, $x' \in \mathfrak{h}_1^*$, il existe $h \in 1 + \mathfrak{j}_1$ tel que $h x h^{-1} \in (b + \mathfrak{h}_1^*) \cap \begin{pmatrix} A^{11} & 0 \\ 0 & A^{22} \end{pmatrix}$.

La suite du raisonnement est, encore une fois, semblable à [BK4, 3.7] : si $g \in GL(V_N)$ entrelace ψ_b , il existe $x, y \in \mathfrak{h}_1^*$ tels que $g^{-1}(b + x)g = b + y$. Quitte à multiplier g par des éléments de $1 + \mathfrak{j}_1$, on peut supposer que x et y appartiennent à $\begin{pmatrix} A^{11} & 0 \\ 0 & A^{22} \end{pmatrix}$. De l'égalité $(b + x)g = g(b + y)$, en comparant les blocs de droite et de gauche, on obtient que $g_{12} = g_{21} = 0$ ([BK4, fin de 3.7]) et que $g_i \in \mathcal{E}_{GL(V^i)}(\psi_{b_i})$ (blocs diagonaux).

Pour l'inclusion inverse, on vérifie aisément que $1 + \mathfrak{j}_1$ et $\mathcal{E}_M$ sont contenus dans $\mathcal{E}$. Il suffit alors de montrer que $(1 + \mathfrak{j}_1)\mathcal{E}(1 + \mathfrak{j}_1) = \mathcal{E}$. Cela se réduit à $\mathcal{E}(1 + \mathfrak{j}_1) \subset \mathcal{E}$.

Soit $g = x(1 + y) \in \mathcal{E}(1 + \mathfrak{j}_1)$. Il appartient à $\mathcal{E}$ s'il existe $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}_1^*$ tels que

$$(*) \quad x(1 + y)b(1 + y)^{-1} - bx = x(1 + y)h_1(1 + y)^{-1} - h_2x.$$

Or x et $1 + y$ appartiennent à $\mathcal{E}$: il existe $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathfrak{h}_1^*$ tels que $xb - bx = xk_1 - k_2x$ et $(1 + y)b(1 + y)^{-1} - b = (1 + y)l_1(1 + y)^{-1} - l_2$. En prenant $h_2 = k_2$ et $h_1 = l_1 + (1 + y)^{-1}(k_1 - l_2)(1 + y)$, l'égalité (*) est vérifiée.

En première conclusion,

$$(5.8.2) \quad \mathcal{E} = (1 + \mathfrak{j}_1)\mathcal{E}_M(1 + \mathfrak{j}_1).$$

Passons au calcul de $\mathcal{E} \cap G_N$. On suit maintenant la démonstration du théorème 2.2.3 de [St1] (auquel on renvoie continûment pour le détail des arguments).

Soient $g \in \mathcal{E}_M$ et $t \in (1 + \mathfrak{j}_1)g(1 + \mathfrak{j}_1) \cap G_N$. On montre successivement :

(a) $t \in (1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda))g'(1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda)) \cap G_N$ où $d = [\frac{n+1}{2}]$ et $g' \in \mathcal{E}_M \cap G_N = \mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2})$;
(b) $t \in U_d(\Lambda)g'U_d(\Lambda)$.

Ainsi, $\mathcal{E} \cap G_N \subset U_d(\Lambda)(\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2}))U_d(\Lambda)$ et on conclut grâce à

(c) $U_d(\Lambda) \subset J_1(U_d(\Lambda) \cap M)$

puisque $U_d(\Lambda) \cap M =: U'_d(\Lambda)$ entrelace $\psi_{b_1} \otimes \psi_{b_2}$.

Commençons par (a). On construit une suite d'éléments g_k de M , $k \geq 1$, tels que

$$\begin{cases} (i) & g_k \in (1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda))g(1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda)) \\ (ii) & g_k \equiv g_{k-1} \pmod{\mathfrak{a}_{m+(k-1)d}(\Lambda)} \\ (iii) & g_k g_k^\sigma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}_{kd}^+(\Lambda) + g_k \mathfrak{a}_{kd}^+(\Lambda) g_k^\sigma} \end{cases}$$

où $m = \nu_\Lambda(t)$.

Alors la suite $(g_k)_{k \geq 1}$ converge vers g' dans $(1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda))g(1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda))$ tel que $g'g'^\sigma = 1$. Ceci prouve (a).

Construction de g_1 puis g_k . On pose $t = (1 + x)g(1 + y) \in G_N$, $x, y \in \mathfrak{j}_1$. Alors

$$gg^\sigma - 1 = (x + x^\sigma + xx^\sigma) - g(y + y^\sigma + yy^\sigma)g^\sigma = X - gYg^\sigma, \quad X, Y \in \mathfrak{a}_d^+(\Lambda).$$

On décompose $\mathfrak{a}_d^+(\Lambda)$ en $\mathfrak{a}_d^+(\Lambda) = \mathfrak{a}_d^{+\Delta}(\Lambda) \oplus \mathfrak{a}_d^{+\nabla}(\Lambda)$ où

$$\mathfrak{a}_d^{+\Delta}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_d^{+\Lambda^1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_d^{+\Lambda^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_d^{+\nabla}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{a}_d^{12}(\Lambda) \\ \mathfrak{a}_d^{21}(\Lambda) & 0 \end{pmatrix} \cap \mathfrak{g}^+,$$

décomposition qui est stable par conjugaison par g . Dans cette décomposition, $X = X_\Delta + X_\nabla$, $Y = Y_\Delta + Y_\nabla$ et $gg^\sigma - 1 = X_\Delta + gY_\Delta g^\sigma$. On pose $v = X_\Delta/2$, $w = Y_\Delta/2$ et

$$g_1 = (1 - v)g(1 - w)^{-1} \in (1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda))g(1 + \mathfrak{a}_d(\Lambda)) \cap M.$$

Alors $(1 - v)(1 + x)t = g_1(1 - w)(1 + y)$ d'où $(1 - v)(1 + x)(1 + x)^\sigma(1 - v)^\sigma = g_1(1 - w)(1 + y)(1 + y)^\sigma(1 - w)^\sigma g_1^\sigma$ et en développant, $g_1 g_1^\sigma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}_d^+(\Lambda) + g_1 \mathfrak{a}_d^+(\Lambda) g_1^\sigma}$.

Si $k \geq 1$ et g_k déterminé, il existe $v', w' \in \mathfrak{a}_{kd}^+(\Lambda)$ tels que $g_k g_k^\sigma - 1 = v' - g_k w' g_k^\sigma$ (iii). On les choisit dans $\mathfrak{a}_{kd}^{+\Delta}(\Lambda)$. On pose $v = v'/2$, $w = w'/2$ et

$$g_{k+1} = (1 - v)g_k(1 - w)^{-1} \in (1 + \mathfrak{a}_{kd}(\Lambda))g(1 + \mathfrak{a}_{kd}(\Lambda)) \cap M.$$

La vérification de (ii) et (iii) pour g_{k+1} est alors identique à [St1, 2.2.4].

Pour (b), on construit une suite d'éléments g'_k de $U_d(\Lambda)tU_d(\Lambda)$ tels que $g'_k \equiv g' \pmod{\mathfrak{a}_{kd}(\Lambda)g'_k + g'\mathfrak{a}_{kd}(\Lambda)}$. Alors $g'_k \equiv g' \pmod{\mathfrak{a}_{kd+m}(\Lambda)}$ pour tout k donc $(g'_k)_k$ converge vers g' dans $U_d(\Lambda)tU_d(\Lambda)$. Cette fois, le raisonnement est celui de S. Stevens [St1, 2.2.6].

Venons-en à (c). Soit $1 + u \in U_d(\Lambda)$ et $u = u_\Delta + u_\nabla$, $u_\Xi \in \mathfrak{a}_d^{\Xi}(\Lambda)$ pour $\Xi = \Delta, \nabla$.

On construit par récurrence une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\mathfrak{a}_d^{\Delta}(\Lambda)$ telle que $u_k \equiv u_{k-1} \pmod{\mathfrak{a}_{kd}^{\Delta}(\Lambda)}$ et $u_k + u_k^\sigma + u_k u_k^\sigma \in \mathfrak{a}_{(k+1)d}^+(\Lambda)$.

On prend $u_1 = u_\Delta$. En comparant les termes dans $\mathfrak{a}_d^{\Delta}(\Lambda)$ de l'égalité $(1 + u)(1 + u)^\sigma = 1$, on obtient que $u_1 + u_1^\sigma + u_1 u_1^\sigma \in \mathfrak{a}_{2d}^+(\Lambda)$ d'où $(1 + u_1)(1 + u_1)^\sigma = 1 \pmod{\mathfrak{a}_{2d}^+(\Lambda)}$.

Si $k \geq 1$, on pose $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2}(u_k + u_k^\sigma + u_k u_k^\sigma)$. Il vérifie clairement toutes les conditions voulues.

Ainsi, la suite $(u_k)_k$ converge dans $\mathfrak{a}_d^{\Delta}(\Lambda)$ (qui est compact) vers $u' \in \mathfrak{a}_d^{\Delta}(\Lambda)$ tel que $u' + u'^\sigma + u' u'^\sigma = 0$. Donc $1 + u' \in U'_d(\Lambda)$.

Or $1 + u = (1 + u)(1 + u')^\sigma(1 + u')$ et $(1 + u)(1 + u')^\sigma \equiv 1 + u_\nabla \pmod{\mathfrak{a}_{2d}(\Lambda)}$ donc appartient à $1 + \mathfrak{j}_1$. Mais $(1 + u)(1 + u')^\sigma \in G_N$ donc $(1 + u)(1 + u')^\sigma \in J_1$ et $1 + u \in J_1 U'_d(\Lambda)$. $\square$

6. Types associés aux représentations supercuspidales.

Pour une représentation $(\pi, \mathcal{V})$ supercuspidale et irréductible de G , on construit précisément un $[G, \pi]_G$ -type. La méthode varie selon que $(\pi, \mathcal{V})$ apparaît au paragraphe 4 ou 5. On distingue donc ces deux cas.

6.1 On considère tout d'abord une représentation $(\pi, \mathcal{V})$ contenant une strate minimale non scalaire $(\mathcal{L}, n, n - 1, b)$ (cf. 4.4.1). La construction est celle décrite dans [BK2, §10].

On reprend les notations (et résultats) de 4.4 et on pose

$$H_1 = (1 + \mathfrak{p}_D) \cap G \cdot U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L}), \quad J_1 = (1 + \mathfrak{p}_D) \cap G \cdot U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}), \quad J = (\mathfrak{o}_D \cap G) \cdot U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}).$$

Le caractère ψ_b se prolonge en un caractère de $U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$ contenu dans π (le quotient $U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})/U_{n+1}(\mathcal{L})$ est abélien), puis en un caractère θ_b de H_1 car $(1 + \mathfrak{p}_D) \cap G$ normalise ψ_b (d'après l'entrelacement de la strate $(\mathcal{L}, n, [\frac{n}{2}], b)$ calculé dans [St1, th. 2.2.3]).

Si $J_1 = H_1$, θ_b est aussi une représentation de J_1 . Sinon, n est nécessairement pair et

Lemme. - (i) *Le groupe $J_1/\text{Ker } \theta_b$ est une extension centrale du groupe abélien J_1/H_1 par le groupe abélien $H_1/\text{Ker } \theta_b$.*

(ii) *L'application $(x, y) \mapsto \theta_b(xy x^{-1} y^{-1})$, de $J_1/H_1 \times J_1/H_1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, définit un accouplement non dégénéré sur J_1/H_1 .*

Donc il existe une unique représentation irréductible $\eta(\theta_b)$ de J_1 dont la restriction à H_1 contienne θ_b . Elle est de dimension $|J_1/H_1|^{\frac{1}{2}}$ et sa restriction à H_1 est multiple de θ_b . Elle est nécessairement contenue dans π .

Que J_1 soit ou non égal à H_1 , l'entrelacement de θ_b , respectivement $\eta(\theta_b)$, est $J_1(D \cap G)J_1 = J$. Or $J/J_1 \simeq \mathfrak{o}_D \cap G/(1 + \mathfrak{p}_D) \cap G$ s'identifie à un sous-groupe de $k_D^\times$ et est donc cyclique. Par suite, θ_b , respectivement $\eta(\theta_b)$, se prolonge en une représentation irréductible λ_{θ_b} de J contenue dans π . Alors $\text{Ind}_J^G \lambda_{\theta_b}$ est irréductible, égale à π .

(6.1.1) *La paire (J, λ_{θ_b}) construite précédemment est un $[G, \pi]_G$ -type.*

(6.1.2) *De plus, la dimension de λ_{θ_b} est égale à $\sqrt{|J_1/H_1|}$, c'est-à-dire 1 si n est impair, q ou q^3 selon que D est ramifiée ou non sur E si n est pair. Précisons que si E est ramifiée sur F , n est nécessairement impair.*

Démonstration du lemme. - Les groupes $H_1/\text{Ker } \theta_b$ et J_1/H_1 s'identifient à des sous-quotients de $U_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L})/U_{\frac{n}{2}+1}(\mathcal{L})$ et sont donc abéliens et finis.

On a clairement la suite exacte : $1 \rightarrow H_1/\text{Ker } \theta_b \rightarrow J_1/\text{Ker } \theta_b \rightarrow J_1/H_1 \rightarrow 1$. De plus, si $j \in J_1$ et $h \in H_1$, $\theta_b(j h j^{-1}) = \theta_b(h)$. En effet, puisque $(1 + \mathfrak{p}_D) \cap G$ normalise θ_b , il suffit de considérer les j dans $U_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L})$ et alors $\theta_b(j h j^{-1}) = \theta_b(h) \psi_{h b h^{-1} - b}(j) = \theta_b(h)$ car $h b h^{-1} - b = (h b - b h) h^{-1} \in \mathfrak{a}_{-n+\frac{n}{2}+1}(\mathcal{L})$. Donc $H_1/\text{Ker } \theta_b$ est central dans $J_1/\text{Ker } \theta_b$ et l'application de (ii) est bien définie. Montrons que c'est un accouplement non dégénéré.

On choisit des représentants des éléments de J_1/H_1 dans $U_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L})$. Par un raisonnement analogue au lemme 5.4, un élément $1 + x + x' \in U_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L})$ ($x \in \mathfrak{a}_{\frac{n}{2}}^-(\mathcal{L})$ et $x' \in \mathfrak{a}_n^+(\mathcal{L})$) appartient au noyau de l'accouplement (ii) si et seulement si $b x - x b \in \mathfrak{a}_{1-\frac{n}{2}}^-(\mathcal{L})$. De la remarque 1.4.15 de [BK1], on déduit que x appartient à $(\mathfrak{o}_D + \mathfrak{a}_{\frac{n}{2}+1}(\mathcal{L})) \cap \mathfrak{a}_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L}) = \mathfrak{o}_D \cap \mathfrak{a}_{\frac{n}{2}}(\mathcal{L}) + \mathfrak{a}_{\frac{n}{2}+1}(\mathcal{L})$ donc $1 + x + x' \in H_1$. L'accouplement (ii) est bien non-dégénéré. $\square$

6.2 On considère désormais une représentation supercuspidale $(\pi, \mathcal{V})$ qui contient une strate scindée au sens (5.1.1) $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$. Par la suite, on sera amené à différencier trois cas suivant la forme de la strate gauche $s_1 = (\Lambda^1, n, n-1, b_1)$ dans $\text{End}_E V^1$ (les notations étant celles du paragraphe 5) :

CAS 1 : s_1 est minimale non scalaire ou scindée au sens (5.1.1) ;

CAS 2 : G^1 est anisotrope et s_1 est scalaire. Ce cas ne peut se produire que lorsque Λ est de période 2 et n est pair si E est non ramifiée; lorsque Λ est de période 1 et n est

impair si E est ramifiée. On distingue donc le cas où E n'est pas ramifiée (2.nr) du cas où E est ramifiée (2.tr).

CAS 3 : G^1 est quasi-déployé et s_1 est scalaire vérifiant les conditions du lemme 5.7.a ou b suivant que E est non ramifiée ou ramifiée sur F .

Ce dernier cas se traite comme les précédents mais les données initiales sont différentes. Les variations sont précisées au paragraphe 6.6. Jusque là, seuls les deux premiers cas sont pris en considération.

Dans un premier temps, on construit des couples (J, λ) formés d'un sous-groupe ouvert compact J contenant J_1 et d'une représentation λ de J contenant η_b dont l'induite à G est irréductible (6.3-6.4). De tels couples sont nécessairement des types [BK4, prop. 5.4].

Dans un deuxième temps (6.5), on montre que la représentation π est nécessairement l'une de ces induites par un argument de comptage qui repose sur le lemme suivant.

Lemme. - *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres entre l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G//J_1, \eta_b)$ et $\mathcal{H}(G^1//U_n(\Lambda^1), \psi_{b_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(E^1//U_n(\Lambda^2), 1)$.*

Démonstration. - On rappelle que $K' = \mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(1)$, $G' = G^1 \times G^2$ et on note $J'_1 = J_1 \cap G' = U_n(\Lambda^1) \times U_n(\Lambda^2)$.

D'après l'entrelacement de η_b dans G et de $\psi_{b_1} \otimes 1$ dans G' , les algèbres $\mathcal{H}(G//J_1, \eta_b)$ et $\mathcal{H}(K'J_1//J_1, \eta_b)$ d'une part, $\mathcal{H}(G'//J'_1, \psi_{b_1} \otimes 1)$ et $\mathcal{H}(K'//J'_1, \psi_{b_1} \otimes 1)$ d'autre part, sont isomorphes. De plus, puisque K' normalise J_1 et J'_1 et que η_b (resp. $\psi_{b_1} \otimes 1$) est irréductible, $\mathcal{H}(K'J_1//J_1, \eta_b)$ (resp. $\mathcal{H}(K'//J'_1, \psi_{b_1} \otimes 1)$) est un espace vectoriel de dimension finie dont une base est formée par les fonctions Φ_g (resp. φ_g) à support dans la double-classe $J_1 g J_1$ (resp. $J'_1 g J'_1$) et prenant la valeur 1 en g , g parcourant un système $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) de représentants des doubles classes modulo J_1 (resp. J'_1). On peut choisir $\mathcal{S} \subset K'$ et $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Alors l'application linéaire de $\mathcal{H}(K'//J'_1, \psi_{b_1} \otimes 1)$ dans $\mathcal{H}(K'J_1//J_1, \eta_b)$ qui envoie φ_g sur Φ_g est un isomorphisme d'algèbres une fois les mesures de Haar de $K'J_1$ et K' normalisées pour que $\text{vol } J_1 = \text{vol } J'_1 = 1$. Ainsi, l'algèbre $\mathcal{H}(G//J_1, \eta_b)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(G'//J'_1, \psi_{b_1} \otimes 1)$, elle-même isomorphe à $\mathcal{H}(G^1//U_n(\Lambda^1), \psi_{b_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(E^1//U_n(\Lambda^2), 1)$, toutes de dimension finie. $\square$

Il existe donc une bijection entre les modules simples sur $\mathcal{H}(G//J_1, \eta_b)$ et les couples de modules simples, l'un sur $\mathcal{H}(G^1//U_n(\Lambda^1), \psi_{b_1})$, l'autre sur $\mathcal{H}(E^1//U_n(\Lambda^2), 1)$ [Bo, §7]. Ces derniers sont tous décrits par les couples formés d'un type (J^1, λ^1) de G^1 contenant s_1 obtenu en annexe, et d'un caractère θ^2 de E^1 trivial sur $(1 + \mathfrak{p}_E^n)^1$.

CONSTRUCTION DE TYPES.

Elle s'avère particulièrement simple lorsque η_b est un caractère, c'est-à-dire lorsque $J_1 = H_1$. On la décrit d'abord dans ce cas (6.3), puis dans l'autre (6.4). Dans les deux cas, on se donne un type (J^1, λ^1) de G^1 décrit en annexe contenant la strate s_1 et un caractère θ^2 de E^1 trivial sur $(1 + \mathfrak{p}_E^n)^1$. On note $J' = J^1 \times E^1$.

Dans le cas 2 où s_1 est scalaire, un type de G^1 contenant s_1 est de la forme $(J^1, \lambda^1 \otimes \chi_{b_1})$ où χ_{b_1} est un prolongement de ψ_{b_1} à G^1 et (J^1, λ^1) un type contenant une strate minimale non scalaire ou scindée au sens (5.1.1) $(\mathcal{L}^1, m, m-1, c_1)$ avec $1 \leq m < n$ ou une strate de niveau 0. On remarque que dans le cas (2.tr), J_1 et H_1 sont toujours égaux tandis que dans le cas (2.nr) ils sont distincts.

6.3 CAS $J_1 = H_1$. L'intersection $J' \cap H_1$ est $U_n(\Lambda^1) \times U_n(\Lambda^2)$ et la représentation lisse irréductible $\lambda^1 \otimes \theta^2$ de J' est multiple de ψ_b sur cette intersection. De plus, J' en tant que sous-groupe de K' , normalise H_1 et entrelace ψ_b . Par suite,

(6.3.1) $J := H_1 J'$ est un sous-groupe ouvert compact de G et $\lambda := \psi_b(\lambda^1 \otimes \theta^2)$ définit une représentation lisse irréductible de J . En outre, la paire (J, λ) est un type de G contenant la strate $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$.

Il reste à montrer l'irréductibilité de $\text{Ind}_J^G \lambda$. Pour cela on calcule l'entrelacement $\mathcal{E}_G(\lambda)$ de λ : on a $J \subset \mathcal{E}_G(\lambda) \subset \mathcal{E}_G(\psi_b) = H_1 K'$ et $\mathcal{E}_{K'}(\lambda) = \mathcal{E}_{K'}(\lambda^1 \otimes \theta^2) = J^1 \times E^1$ donc $\mathcal{E}_G(\lambda) = J$ et $\text{Ind}_J^G \lambda$ est bien irréductible.

6.4 CAS $J_1 \neq H_1$. Soit $J'_1 = (J^1 \times E^1) \cap U_1(\Lambda) = J_1^1 \times (1 + \mathfrak{p}_E)^1$ où $J_1^1 = J^1 \cap U_1(\Lambda^1)$. C'est un sous-groupe ouvert compact de J' , distingué et d'indice premier à q . Alors le produit $J_1 J'_1$ forme un sous-groupe de G , ouvert et compact, noté $\tilde{J}_1$.

Comme η_b et $\lambda^1 \otimes \theta^2$ agissent par ψ_b sur $J_1 \cap J'_1$ et que $\eta_b([g, h]) = 1$ pour $g \in J_1$ et $h \in J'_1$, le produit $\eta_b \cdot (\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1}$ définit une représentation ρ de $\tilde{J}_1$, irréductible et de dimension $\dim \eta_b \cdot \dim \lambda^1$, c'est-à-dire q^s pour un $s \in \mathbb{N}^*$ convenable.

Lemme. -

- i) L'entrelacement $\mathcal{E}_G(\rho)$ de ρ est le sous-groupe ouvert compact $\tilde{J}$ défini par $\tilde{J} = J_1 J'$.
- ii) Il existe un isomorphisme d'algèbres Ψ de $\mathcal{H}(J'/J'_1, (\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1})$ sur $\mathcal{H}(\tilde{J}/\tilde{J}_1, \rho)$ préservant le support au sens où, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(J'/J'_1, (\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1})$, $\text{supp}(\Psi(f)) = \tilde{J} \text{supp}(f) \tilde{J}$.

Démonstration. - i) Soit $g \in \mathcal{E}_G(\rho)$. Alors g entrelace la restriction de ρ à J_1 qui est multiple de η_b donc $g \in \mathcal{E}_G(\eta_b) = J_1 K'$ (5.4.1). Écrivons donc g sous la forme $g = jk$ où $j \in J_1$ et $k \in K'$. Un élément x de $\tilde{J}_1$ est de la forme $x_1 x'$ avec $x_1 \in J_1$ et $x' \in J'_1$. Alors $g x g^{-1} \in \tilde{J}_1$ si et seulement si $k x' k^{-1} \in J'_1$. Par suite, si $g = jk$ entrelace ρ , k entrelace $(\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1}$, c'est-à-dire $k \in J'$. Ainsi $\mathcal{E}_G(\rho) \subset \tilde{J}$.

L'inclusion inverse est claire puisque tout élément de $\tilde{J}$ ou $J_1(G^1 \times E^1)$ entrelace η_b et que tout élément de J' ou $G^1 \times E^1$ entrelace $(\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1}$.

La démonstration de (ii) est analogue à celle de 6.2. □

Le groupe $\tilde{J}$ contient $\tilde{J}_1$ comme sous-groupe distingué et le quotient $B = \tilde{J}/\tilde{J}_1$ est isomorphe à $J^1/J_1^1 \times E^1/(1 + \mathfrak{p}_E)^1$. Ce dernier est abélien d'ordre d premier à q .³

La représentation ρ s'étend en une représentation projective $\bar{\rho}$ de $\tilde{J}$. L'obstruction à relever $\bar{\rho}$ en une vraie représentation de $\tilde{J}$ est un élément ω de $H^2(B, \mathbb{C}^\times)$ qui s'interprète comme un accouplement antisymétrique sur B [Ca, 5.4]. Cet élément est défini par : pour $b_1, b_2 \in B$, relevés respectivement en j_1, j_2 dans $\tilde{J}$,

$$\omega(b_1, b_2) = \rho(j_2^{-1} j_1^{-1} j_2 j_1) A(j_1)^{-1} A(j_2)^{-1} A(j_1) A(j_2)$$

où $A(j)$ satisfait $j\rho = A(j) \circ \rho \circ A(j)^{-1}$, $j \in \tilde{J}$.

D'une part, en tant qu'accouplement sur B , ω prend ses valeurs dans μ_d , le groupe des racines d -ièmes de 1. D'autre part, en considérant un système de générateurs $\{b_i\}$

³si E est non ramifiée sur F , $|B| = 2(q-1)$ ou $(q+1)(q-1)^2$ ou $(q-1)^3$; si E est ramifiée sur F , $|B| = 4$ ou 8 ou $2(q-1)$.

de B , relevés dans $J' \subset \tilde{J}$ de manière à ce qu'ils commutent entre eux, on montre que $\omega(b_i, b_j)$ appartient à μ_{q^s} . D'où ω est triviale et ρ se prolonge à $\tilde{J}$ en une représentation irréductible λ . On déduit immédiatement du lemme que $\mathcal{E}_G(\lambda) = \tilde{J}$.

De plus, l'isomorphisme Ψ de (ii) permet d'affirmer que les représentations λ ainsi obtenues sont isotypiques par restriction à J' et qu'il en existe une et une seule qui contienne la représentation $\lambda^1 \otimes \theta^2$.

(6.4.1) *Il existe une unique paire $(\tilde{J}, \lambda)$ où $\tilde{J} = J_1(J^1 \times E^1)$ et où λ est un prolongement à $\tilde{J}$ de la représentation $\eta_b \cdot (\lambda^1 \otimes \theta^2)|_{J'_1}$ de $\tilde{J} \cap U_1(\Lambda)$ dont la restriction à J' est multiple de $\lambda^1 \otimes \theta^2$. Cette paire est un type de G contenant la strate $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$.*

LE COMPTAGE.

6.5 De la construction précédente, on déduit une application de l'ensemble des couples de modules simples, l'un sur $\mathcal{H}(G^1//U_n(\Lambda^1), \psi_{b_1})$, l'autre sur $\mathcal{H}(E^1//U_n(\Lambda^2), 1)$, dans l'ensemble des modules simples sur $\mathcal{H}(G//J_1, \eta_b)$ via les types :

au couple $((J^1, \lambda^1), (E^1, \theta^2))$ elle associe l'unique paire (J, λ) obtenue en (6.3) ou (6.4) telle que $\lambda|_{J'}$ soit multiple de $\lambda^1 \otimes \theta^2$.

Montrer l'exhaustivité de la construction revient à montrer l'injectivité de cette application (lemme 6.2).

Considérons deux types obtenus précédemment à partir d'une même strate $(\Lambda, n, n-1, b_1 \oplus 0)$ que nous notons (J, λ) et (I, κ) .

Supposons que (J, λ) soit construit à partir de (J^1, λ^1) et (E^1, θ^2) et (I, κ) à partir de (I^1, κ^1) et (E^1, ζ^2) .

Lemme. - *Si (J, λ) et (I, κ) représentent la même classe d'inertie dans G , alors les types (J^1, λ^1) et (I^1, κ^1) de G^1 représentent une même classe d'inertie dans G^1 et $\theta^2 = \zeta^2$.*

Démonstration. - Par hypothèse, $\text{Ind}_J^G \lambda$ et $\text{Ind}_I^G \kappa$ sont conjuguées donc λ et κ sont entrelacées dans G . Soit g un élément entrelaçant λ et κ . Comme g entrelace aussi leurs restrictions à H_1 , c'est-à-dire ψ_b , g est un élément de $J_1 K'$ (5.4.1). Écrivons $g = jk$, $k \in K'$. Par le même raisonnement qu'au lemme 6.4, k entrelace $\lambda|_{J'}$ et $\kappa|_{I'}$ donc k entrelace $\lambda^1 \otimes \theta^2$ et $\kappa^1 \otimes \zeta^2$ (6.3, 6.4.1). On en déduit que $\theta^2 = \zeta^2$ et que $\text{Ind}_{J_1}^{G^1} \lambda^1$ et $\text{Ind}_{I_1}^{G^1} \kappa^1$ sont isomorphes puisqu'irréductibles. $\square$

6.6 *Le cas 3.* Supposons d'abord que π vérifie la condition (1) du lemme a ou b selon l'indice de ramification de E . Elle contient par hypothèse un caractère $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ de $J(\mathcal{L})$ (5.7.2 ou 5.7.3) où $\psi_{b'_1}$ est défini par une strate minimale non scalaire s_1 dans A^1 .

On refait alors la même construction qu'en 6.3 en remplaçant le groupe H_1 par $J(\mathcal{L})$, le caractère $\psi_{b_1} \otimes 1$ par $\psi = \psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ et en définissant K' par $\mathcal{E}_{G^1}(\psi_{b'_1}) \times \mathcal{E}_{G^2}(\psi_{b_2})$ qui normalise $J(\mathcal{L})$.

(6.6.1) *Soient (J^1, λ^1) un type construit en annexe contenant la strate minimale non scalaire s_1 et θ^2 un prolongement de ψ_{b_2} à E^1 . Le produit $J := J(\mathcal{L})(J^1 \times E^1)$ est un sous-groupe compact ouvert de G et $\lambda := \psi(\lambda^1 \otimes \theta^2)$ définit une représentation lisse irréductible de J . La paire (J, λ) est un type de G .*

En effet, l'entrelacement de ψ est encore $J(\mathcal{L})K'$ (cf. dém. 5.7) ce qui assure l'irréductibilité de l'induite à G de λ . De plus, on obtient un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}(G//J(\mathcal{L}), \psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2})$ et $\mathcal{H}(G^1//U_{n-2}(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^1}), \psi_{b'_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(G^2//U_{n-2}(\mathcal{L}_{\mathcal{L}^2}), \psi_{b_2})$ (analogue à 6.2) et l'exhaustivité s'établit comme en 6.5.

Si π vérifie les conditions (2), il est immédiat que

(6.6.2) la paire $(K(\mathcal{N}), \rho)$ est un type pour la classe d'inertie $[G, \pi]_G$ de π .

7. Types de la série principale : types induits.

Pour compléter la liste des types de G , il reste à déterminer un type pour chaque classe d'inertie dans G d'une représentation supercuspidale σ d'un sous-groupe de Levi propre M de G . Pour ce faire, on construit des *paires couvrantes* (ou G -covers) [BK3, §8] au-dessus d'un type de la classe d'inertie de σ dans M par la méthode développée par C. Blondel [Bl2]. On renvoie à [BB, I.3] pour le principe et les ingrédients de cette méthode.

7.1 Soit M un sous-groupe de Levi propre de G qui n'est autre qu'un tore maximal de G . Par choix d'une base de Witt dans laquelle la matrice de la forme hermitienne s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il s'identifie au groupe des matrices $d(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}$, $\alpha \in E^\times, \beta \in E^1$, et contient le tore déployé maximal $S = \{d(\alpha, 1), \alpha \in F^\times\}$.

Les seules représentations lisses irréductibles de M sont ses caractères. En écrivant $M = T \times E^1$ où $T = \{d(\alpha, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}), \alpha \in E^\times\}$, un tel caractère s'écrit $\chi \otimes \chi_0$ où χ et χ_0 sont des caractères de T et E^1 respectivement.

Soient $J_T = \{d(\alpha, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}), \alpha \in \mathfrak{o}_E^\times\}$ et $J_M = J_T \times E^1$. En notant encore χ la restriction de χ à J_T , la paire $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ est un type pour la classe d'inertie $\mathfrak{s}_M = [M, \chi \otimes \chi_0]_M$.

Plus généralement, si $J_{M,k}$ désigne $\{d(\alpha, \beta) \in J_M, \alpha, \beta \in 1 + \mathfrak{p}_E^k\}$, $k \geq 1$, et si on note encore $\chi \otimes \chi_0$ la restriction de $\chi \otimes \chi_0$ à $J_{M,k}$, la paire $(J_{M,k}, \chi \otimes \chi_0)$ est un type pour un ensemble $\mathfrak{S}_k(M)$ de classes d'inertie dans M : $\mathfrak{S}_k(M) = \{[M, \tilde{\chi}]_M \text{ où } \tilde{\chi}|_{J_{M,k}} = \chi \otimes \chi_0\}$.

Un type $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ (resp. $(J_{M,k}, \chi \otimes \chi_0)$, $k \geq 1$) étant donné, on note $m \geq 1$ le conducteur de χ vu comme caractère de $\mathfrak{o}_E^\times$, et l celui de sa restriction à $\mathfrak{o}_F^\times$: $1 \leq l \leq m$ (resp. $k \leq l \leq m$) si E n'est pas ramifiée sur F , $1 \leq l \leq [\frac{m+1}{2}]$ (resp. $k \leq l \leq [\frac{m+1}{2}]$) sinon. Le niveau 0 correspond au cas où $l = m = 1$. Vu au paragraphe 3, il n'est pas répété ici.

7.2 Fixons encore quelques notations. Notons a la racine simple de G , $a : d(\alpha, 1) \mapsto \alpha$. Le système de racines de G par rapport à S est $\{a, 2a, -a, -2a\}$.

Notons P le sous-groupe parabolique formé des matrices triangulaires supérieures contenues dans G , N^+ son radical unipotent : $P = MN^+$. Notons N^- le radical unipotent du sous-groupe parabolique $\bar{P}$ opposé à P relativement à M :

$$N^+ = \left\{ u^+(c, d) = \begin{pmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & -\bar{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, E) \text{ et } c\bar{c} + d + \bar{d} = 0 \right\},$$

$$N^- = \left\{ u^-(c, d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{c} & 1 & 0 \\ d & c & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, E) \text{ et } c\bar{c} + d + \bar{d} = 0 \right\}.$$

Les sous-groupes N^+ et N^- ne sont autres que les sous-groupes radiciels N_a et N_{-a} associés aux racines a et $-a$ et sont donc munis d'une filtration strictement décroissante [BT, 10.1] : $N_{\pm a}(k) = \{u^\pm(c, d) \in N_{\pm a}, \omega(d) \geq 2k\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

De même, les sous-groupes radiciels associés à $2a$ et $-2a$, $N_{2a} = \{u^+(0, d) \text{ et } d + \bar{d} = 0\}$ et $N_{-2a} = \{u^-(0, d) \text{ et } d + \bar{d} = 0\}$, sont filtrés par les suites strictement décroissantes : $N_{\pm 2a}(k) = \{u^\pm(0, d) \in N_{\pm 2a}, \omega(d) \geq k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, k impair si $e_0 = 2$.

Pour chaque couple (i, j) de $\mathbb{Z}^2$, on définit des sous-groupes $J^+(i, j)$ et $J^-(i, j)$ de N^+ et N^- (respectivement) par :

$$J^+(i, j) = N_a(i)N_{2a}(j) \text{ et } J^-(i, j) = N_{-a}(i)N_{-2a}(j).$$

On remarque que si $j \geq 2i$, $J^\pm(i, j) = N_{\pm a}(i)$. On suppose donc $j \leq 2i$.

Lemme. - On a $J^\pm(i, j) = \{u^\pm(c, d) \in N^\pm, \omega(c) \geq i, \omega(d) \geq j\}$ pour tout couple (i, j) de $\mathbb{Z}^2$ tel que $j \leq 2i$.

Démonstration. - Un élément x de $J^\pm(i, j)$ est de la forme $u^\pm(c, d + d_0)$ où $u^\pm(c, d) \in N_{\pm a}(i)$ et $u^\pm(0, d_0) \in N_{\pm 2a}(j)$, c'est-à-dire $\omega(d) \geq 2i$ et $\omega(d_0) \geq j$. Comme $c\bar{c} + d + \bar{d} = 0$, on déduit que $\omega(c) \geq i$ et $\omega(d + d_0) \geq \min(j, 2i) = j$ d'où une des inclusions voulues. Pour l'inclusion inverse, considérons $x = u^\pm(c, d) \in N^\pm$ où $\omega(c) \geq i, \omega(d) \geq j$. Alors, la relation précédente implique que $d + \bar{d} \in \mathfrak{p}_E^{2i}$. On pose $d_0 = d - \frac{1}{2}(d + \bar{d})$. C'est un élément de $\mathfrak{p}_E^j$ (puisque 2 est inversible dans $\mathfrak{o}_E$), de trace nulle tel que $d - d_0 \in \mathfrak{p}_E^{2i}$. Par suite, $x = u^\pm(c, d - d_0)u^\pm(0, d_0)$ et appartient donc à $J^\pm(i, j)$. $\square$

Remarque. - Lorsque E est ramifiée, si j est pair et $j \leq 2i$, $J^\pm(i, j) = J^\pm(i, j + 1)$.

7.3 Lemme. - Soient $i, i', j, j' \in \mathbb{Z}$ tels que $j \leq 2i$ et $j' \leq 2i'$.

(i) Si $i + i' \geq 1, j + j' \geq 1, i + j' \geq i', i' + j \geq i$ alors $J^-(i', j')J_M J^+(i, j)$ est un sous-groupe compact ouvert de G .

(i') Si $i + i' \geq k, j + j' \geq k, i + j' \geq i', i' + j \geq i$ alors $J^-(i', j')J_{M,k} J^+(i, j)$ est un sous-groupe compact ouvert de G .

(ii) On suppose que i, i', j, j' vérifient les conditions de (i) (resp. (i')).

Soit $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ (resp. $(J_{M,k}, \chi \otimes \chi_0)$) un type défini en (7.1). La représentation $\chi \otimes \chi_0$ se prolonge trivialement à $J^-(i', j')J_M J^+(i, j)$ (resp. $J^-(i', j')J_{M,k} J^+(i, j)$) dès que $i + i' \geq m, j + j' \geq e_0 l, 2i + j' \geq m, 2i' + j \geq m$.

L'assertion (ii) décrit une famille de paires décomposées au-dessus de $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ (resp. $(J_{M,k}, \chi \otimes \chi_0)$) relativement à P .

Démonstration. Elle repose sur le lemme 1 de [Bl1] et l'identité suivante :

(7.3.1) Soient $x = u^+(c, d)$ et $y = u^-(\gamma, \delta)$. Si $\alpha = 1 - c\bar{\gamma} + \delta d$ est inversible, alors

$$xy = u^-\left(\frac{\gamma + c\bar{\delta}}{\bar{\alpha}}, \frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot d\left(\alpha, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot u^+\left(\frac{c + \gamma d}{\alpha}, \frac{d}{\alpha}\right).$$

Puisque J_M normalise tout sous-groupe de la forme $J^\pm(i, j)$, $J^-(i', j')J_M J^+(i, j)$ est un groupe dès que $J^+(i, j)J^-(i', j') \subset J^-(i', j')J_M J^+(i, j)$ ce que l'on vérifie aisément sous les conditions (i) grâce à (7.3.1). On fait de même pour (i').

Pour établir (ii), on introduit le sous-groupe $H_M = \{d(\alpha, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}), \alpha \in (1 + \mathfrak{p}_E^m)(1 + \mathfrak{p}_F^l)\}$ contenu dans $\text{Ker } \chi \otimes \chi_0$. Comme précédemment, on vérifie que $J^-(i', j')H_M J^+(i, j)$ est un groupe sous les conditions énoncées et on conclut par le lemme 1 de [Bl1]. $\square$

7.4 Considérons l'élément $\xi = \begin{pmatrix} \varpi_E & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \end{pmatrix}$ de G . Alors, ξ normalise J_M et pour tout

$(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $\xi^{-1}J^+(i, j)\xi = J^+(i - 1, j - 2)$ et $\xi^{-1}J^-(i, j)\xi = J^-(i + 1, j + 2)$. Les suites de sous-groupes $(J_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ utilisées sont toutes *périodiques* au sens où il existe un entier $r > 0$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $J_{i+r} = \xi^{-1}J_i\xi$. Pour obtenir des paires couvrantes, on

impose une condition de maximalité qui se traduit dans notre cas par : $i + i' = m$ et $j + j' = e_0 l$.

Définition. - On définit la suite de sous-groupes $(J_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de périodicité r telle que si E est non ramifiée et $l \geq 2$, $r = 3$ et

$$J_0 = J^-(m, l + m - 2)J_M J^+(0, -m + 2), J_1 = J^-(m, l + m - 1)J_M J^+(0, -m + 1), \\ J_2 = J^-(m, l + m)J_M J^+(0, -m);$$

si E est non ramifiée et $l = 1$ ($m > 1$), $r = 2$ et

$$J_0 = J^-(m, m)J_M J^+(0, -m + 1), J_1 = J^-(m, m + 1)J_M J^+(0, -m);$$

si E est ramifiée et $l \geq 2$, $r = 2$ et

$$J_0 = J^-(m, 2[\frac{m}{2}] + 2(l - 1) - 1)J_M J^+(0, -2[\frac{m}{2}] + 3), \\ J_1 = J^-(m, 2[\frac{m}{2}] + 2l - 1)J_M J^+(0, -2[\frac{m}{2}] + 1);$$

si E est ramifiée et $l = 1$ ($m > 1$), $r = 1$ si m est pair, $r = 2$ si m est impair, et

$$J_0 = J^-(m, m + 1)J_M J^+(0, -m + 1) \text{ si } m \text{ est pair;} \\ J_0 = J^-(m, m)J_M J^+(0, -m + 2), J_1 = J^-(m, m + 2)J_M J^+(0, -m) \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Proposition. - Soient $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ un type décrit en (7.1), m le conducteur de χ et l celui de $\chi|_{F^\times}$. Soit $(J_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la suite de sous-groupes définie précédemment.

(i) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la représentation $\chi \otimes \chi_0$ se prolonge trivialement en une représentation τ_i de J_i . La paire (J_i, τ_i) ainsi obtenue forme une paire décomposée au-dessus de $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ relativement à P .

(ii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la paire (J_i, τ_i) de (i) forme une paire couvrante au-dessus de $(J_M, \chi \otimes \chi_0)$ relativement à P .

Par le deuxième théorème d'adjonction de Bernstein [Bu], on en déduit :

Corollaire. - Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie dans G de la forme $[M, \chi \otimes \chi_0]_G$ où χ est un caractère de $E^\times$ de conducteur m et χ_0 un caractère de E^1 . On note l le conducteur de $\chi|_{F^\times}$. Alors, les paires (J_i, τ_i) définies précédemment sont des $\mathfrak{s}$ -types dans G .

7.5 Démonstration de la proposition. - L'assertion (i) est une conséquence immédiate du lemme 7.3. L'assertion (ii) est une application directe du théorème 3.4 [BB, I.3]. On utilise en outre l'identité :

(7.5.1) Soient $x = u^+(c, d)$ et $y = u^-(\gamma, \delta)$. Si $\alpha = 1 - c\bar{\gamma} + \delta d$ est inversible, alors

$$x^{-1}yx = u^-\left(\frac{\gamma - c\bar{\delta}}{\bar{\alpha}}, \frac{\delta}{\alpha}\right) \cdot d\left(\alpha, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right) \cdot u^+\left(\frac{c^2\bar{\gamma} + c\delta\bar{d} + \bar{d}\gamma}{\alpha}, \frac{c\bar{\gamma}d - \gamma\bar{c}d + \delta d\bar{d}}{\alpha}\right).$$

Grâce à la périodicité des suites, on se limite aux entiers i compris entre 0 et r .

Commençons par les cas où l est au moins égal à 2. On utilise alors le critère 1 : pour chaque i et chaque $x \in J_{i+1}^+$, $x \notin J_i^+$, on détermine un sous-groupe fermé $H_{i,x}$ de J_i^- dont le conjugué par x est contenu dans J_i et tel que la restriction de τ_i à $x^{-1}H_{i,x}x$ ne contient pas la représentation triviale.

Soit $i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i < r$. Il suffit de considérer un élément x de J_{i+1}^+ de la forme $u^+(0, d)$ où $\omega(d)$ est minimale si E n'est pas ramifiée et $i \neq 2$ ou si E est ramifiée et $i = 0$, de la forme $u^+(c, d)$ où $\omega(c) = -1$ sinon.

Dans le premier cas, on note $k = m + l - 2 + i$ si E n'est pas ramifiée et $k = 2[\frac{m}{2}] + 2(l - 1) - 1$ si E est ramifiée. Le sous-groupe $H_{i,x} = N_{-2a}(k)$ de J_i^- est fermé,

son conjugué par x est contenu dans J_i grâce à (7.5.1) et si $y = u^-(0, \delta) \in H_{i,x}$, $\tau_i(x^{-1}yx) = \chi(1 + d\delta)$. Or l'application $\delta \mapsto d\delta$ est une bijection de $\mathfrak{ep}_F^{[k/e_0]}$ sur $\mathfrak{p}_F^{l-1}$. Par conséquent, la restriction de τ_i à $xH_{i,x}x^{-1}$ ne contient pas la représentation triviale.

Dans le deuxième cas, quitte à multiplier x par un élément de J_i^+ , on peut supposer que $x \in J_{i+1}^+ \cap N_a$, c'est-à-dire que $\omega(d) \geq -2$. Posons $H_{i,x} = N_{-a}(m)$. Si $y = u^-(\gamma, \delta) \in H_{i,x}$ alors $1 - c\bar{\gamma} + d\delta \in 1 + \mathfrak{p}_E^{m-1}$ et est donc inversible. Par (7.5.1), on vérifie que $x^{-1}yx$ est un élément de J_i et on obtient que $\tau_i(x^{-1}yx) = \chi(1 - c\bar{\gamma} + d\delta) = \chi(1 - c\bar{\gamma})$ car $\omega(d\delta) \geq m$ ($l \geq 2$). Quand $u^-(\gamma, \delta)$ parcourt $U_{-a}(m)$, γ parcourt $\mathfrak{p}_E^m$ donc $c\gamma$ parcourt $\mathfrak{p}_E^{m-1} : \tau_i|_{x^{-1}H_{i,x}x} \not\equiv 1$.

Passons aux cas où $l = 1$ ($m > 1$). On utilise maintenant le critère 2 : pour chaque i , on vérifie que le sous-groupe K_i engendré par J_i et J_{i+1} est compact et que le support de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(K_i/J_i, \tau_i)$ est contenu dans $J_i \cup J_i \sigma J_i$ où σ est un élément de G normalisant J_M et conjuguant J_i^+ en J_{i+1}^- , J_i^- en J_{i+1}^+ .

Les éléments σ sont fournis par le lemme suivant dont la démonstration est purement et simplement calculatoire.

Lemme. - Soit $\sigma_{k+\nu} = u^-(0, \varpi^k \epsilon) u^+(0, -(\varpi^k \epsilon)^{-1}) u^-(0, \varpi^k \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\varpi^k \epsilon)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \varpi^k \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$k \in e_0 \mathbb{Z}$ et $\nu = \omega(\epsilon)$. Alors $\sigma_{k+\nu}$ normalise J_M et, pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases} \sigma_{k+\nu} J^+(i, j) \sigma_{k+\nu}^{-1} = J^-(i + k + \nu, j + 2k + 2\nu) \text{ et} \\ \sigma_{k+\nu} J^-(i, j) \sigma_{k+\nu}^{-1} = J^+(i - k - \nu, j - 2k - 2\nu). \end{cases}$$

Limitons-nous tout d'abord au cas où E n'est pas ramifiée sur F .

(a) Quand $i = 0$, l'élément $\sigma = \sigma_m$ normalise J_M et conjugue J_0^+ en J_1^- , J_0^- en J_1^+ : le sous-groupe K_0 est donc engendré par J_0 et σ . De plus, $J_0 \cup J_0 \sigma J_0$ est un groupe. En effet, il suffit de montrer que $\sigma J_0 \sigma \subset J_0 \cup J_0 \sigma J_0$. Or $\sigma J_0 \sigma \subset J_0 J_1^+ = J_0 N_{2a}(-m) = J_0 \cup J_0 \{u^+(0, d), \omega(d) = -m\}$. Un élément $u^+(0, d)$ avec $\omega(d) = -m$ s'écrit $u^+(0, d) = u^-(0, d^{-1}) d(d\varpi_E^m, 1) \sigma u^-(0, d^{-1})$ donc appartient à $J_0^- J_M \sigma J_0^-$. Ainsi, $\sigma J_0 \sigma \subset J_0 \cup J_0 \sigma J_0$.

Par suite, $K_0 = J_0 \cup J_0 \sigma J_0$ et toutes les conditions du critère 2 sont alors trivialement satisfaites.

(b) Quand $i = 1$, on introduit $H_1 = J^-(m, m+1) J_M J^+(-1, -m)$. C'est un groupe, par le lemme 7.3, contenu dans K_1 . En choisissant $\sigma = \sigma_{m+1}$, on montre comme ci-dessus que $K_1 = H_1 \cup H_1 \sigma H_1$. Etudions les doubles classes de K_1 modulo J_1 .

La partie $H_1 \sigma H_1$ correspond à la double classe de σ car :

$$H_1 \sigma H_1 = J_1^- J_M (J^+(-1, -m) \sigma) H_1 = J_1^- J_M (\sigma J^+(-1, -m)) J_M J_1^- = J_1 \sigma J_1.$$

La partie $H_1 = J_1 N_a(-1)$ est réunion de doubles classes dont un représentant appartient à $N_a(-1)$. Soit $x = u^+(c, d)$ un tel représentant. Alors, $x = u^+(c, \frac{1}{2}c\bar{c}) u^+(0, d - \frac{1}{2}c\bar{c}) \in u^+(c, \frac{1}{2}c\bar{c}) J_1^+$: on peut choisir $x = u^+(c, \frac{1}{2}c\bar{c})$, $c \in \mathfrak{p}_E^{-1}$. Si $\omega(c) \geq 0$, x représente J_1 . Sinon, $\omega(c) = -1$ et en conjuguant par un élément $d(\alpha, 1) \in J_M$, on peut choisir $x = u^+(\varpi_E^{-1}, \frac{1}{2}\varpi_E^{-1}\overline{\varpi_E^{-1}})$. En conséquence, $K_1 = J_1 \cup J_1 \sigma J_1 \cup J_1 x J_1$ est compact.

Montrons par l'absurde que x n'entrelace pas τ_1 . Par définition de τ_1 , $\tau_1|_{N_{-2a}(m+1)}$ est triviale donc, pour tout $y = u^-(0, \delta) \in N_{-2a}(m+1)$, $\tau_1(x^{-1}yx) = \chi(1 + \delta \frac{1}{2}\varpi_E^{-1}\overline{\varpi_E^{-1}}) = 1$. On en déduit que χ est trivial sur $1 + \mathfrak{ep}_F^{m-1}$ ($\frac{1}{2}\varpi_E^{-1}\overline{\varpi_E^{-1}}\delta$ décrit $\mathfrak{ep}_F^{m-1}$) et, puisque χ est trivial sur $1 + \mathfrak{p}_F^{m-1}$ ($l = 1 < m$), que χ est trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E^{m-1}$. Ceci contredit la définition de m .

En conclusion, le support de $\mathcal{H}(K_1//J_1, \tau_1)$ est contenu dans $J_1 \cup J_1\sigma J_1$. On a donc réuni toutes les conditions du critère 2.

Désormais, E est ramifiée sur F . Si m est pair, le même raisonnement que ci-dessus (b) donne le même résultat. Si m est impair et $i = 0$, la démonstration est celle de (a). Supposons que $i = 1$. Comme $J^-(m, m+2)J_M J^+(-1, -m)$ est un groupe par le lemme 7.3, on a l'égalité $K_1 = J^-(m, m+2)J_M J^+(-1, -m)$: K_1 est bien compact. De plus, toute double classe modulo J_1 a un représentant x de la forme $u^+(c, \frac{1}{2}c\bar{c}) \in N_a(-1)$ ($m > l = 1$). Si $\omega(c) \geq 0$, x représente J_1 . Sinon, $\omega(c) = -1$ et x n'entrelace pas τ_1 . En effet, $x^{-1}yx \in J_1$ pour tout $y = u^-(\gamma, \delta) \in N_{-a}(m) \subset J_1^-$ et $\tau_1(y) = 1$ tandis que $\tau_1(x^{-1}yx) = \chi(1 - c\bar{\gamma} + \frac{1}{2}c\bar{c}\delta) = \chi(1 - c\bar{\gamma}) \neq 1$ puisque $c\bar{\gamma}$ parcourt $\mathfrak{p}_E^{m-1}$ quand γ parcourt $\mathfrak{p}_E^m$. Le support de $\mathcal{H}(K_1//J_1, \tau_1)$ est donc J_1 et les conditions du critère 2 sont satisfaites. $\square$

7.6 Application : fin de la démonstration des lemmes 5.7.a et b.

Il s'agit de montrer qu'une représentation lisse irréductible $(\pi, \mathcal{V})$ de G contenant le caractère $\psi_{b'}$ de H_1 (5.2) où $b' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vérifie les conditions (1) ou (2) des lemmes a ou b (5.7) ou contient une paire couvrante.

A l'aide du lemme 7.3, on vérifie aisément que H_1 admet une décomposition d'Iwahori $H_1 = J^-(k'+1, k+1)J_{L,k}J^+(k'+\iota, k)$ ($k' = [\frac{k}{2}]$ et $\iota = k - 2k'$) et que la paire $(H_1, \psi_{b'})$ est décomposée au-dessus du type $(J_{L,k}, \psi_{b'|J_{L,k}})$ (7.1).

La première étape consiste à déterminer des paires couvrantes (J, ψ) prolongeant $(H_1, \psi_{b'})$ au sens où $J \supset H_1$ et ψ prolonge trivialement $\psi_{b'}$ à J .

Si $k = 1$, on les obtient grâce à la proposition 7.4 et [BB, prop. I.4.3]. Si $k > 1$, on détermine des suites de paires décomposées contenant $(H_1, \psi_{b'})$ grâce au lemme 7.3. Le conducteur de $\psi_{b'}$ est $m = k+1$ tandis que celui de sa restriction à $(1 + \mathfrak{p}_E^k) \cap F$ est $l = k$ si E est non ramifiée, $l = k' + 1$ si E est ramifiée. En imposant les mêmes conditions de maximalité qu'en 7.4 et en refaisant, mutatis mutandis, le même raisonnement qu'en 7.5, on obtient que

(7.6.1) le caractère $\psi_{b'}$ de H_1 se prolonge trivialement aux sous-groupes J suivants pour former une paire couvrante au-dessus de $(J_{L,k}, \psi_{b'|J_{L,k}})$.

Si E non ramifiée,

$$J = \begin{cases} J^-(k'+1, k-1)J_{L,k}J^+(k'+\iota, 1), J^-(k'+1, k)J_{L,k}J^+(k'+\iota, 0), \\ J^-(k'+1+\iota, k+1-\iota)J_{L,k}J^+(k', \iota-1) \text{ ou} \\ J^-(k'+\iota, 0)J_{L,k}J^+(k'+1, k), J^-(k'+\iota, 1)J_{L,k}J^+(k'+1, k-1), \\ J^-(k'+1, 1+\iota)J_{L,k}J^+(k'+\iota, k-1-\iota). \end{cases}$$

Si E est ramifiée,

$$J = \begin{cases} J^-(k'+1, k-2)J_{L,k}J^+(k'+1, 3), J^-(k'+1, k)J_{L,k}J^+(k'+1, 1) \text{ ou} \\ J^-(k'+1, 1)J_{L,k}J^+(k'+1, k), J^-(k'+1, 1)J_{L,k}J^+(k', k). \end{cases}$$

Pour poursuivre, on choisit un représentant de $b' + \mathfrak{a}_{-3k+1}^-(\mathcal{L})$ dans $\mathfrak{a}_{-3k}^-(\mathcal{L})$ de la forme $b' = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\mu} \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathfrak{p}_E^{-k+1} \cap F$ afin que $\omega(\mu + \bar{\mu}) = -k + 1$ (k est impair si E est ramifiée).

La deuxième étape est la démonstration du lemme a : E est non ramifiée sur F .

Reprenons le groupe $J(\mathcal{L})$ de (5.7.2), qui s'écrit $J(\mathcal{L}) = J^-(k' + 1, k)J_{L,k}J^+(k' + \iota, k - 1)$, ainsi que le caractère $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ de $J(\mathcal{L})$ contenu dans π . Si la condition (1) n'est pas satisfaite, $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ est trivial sur $J^+(k' + \iota, k - 1)$ ou $J^-(k' + 1, k)$. Supposons par exemple qu'il soit trivial sur le premier.

(i) Posons $J_r = J^-(k' + 1, k + 1)J_{L,k}J^+(k' + \iota, k - r)$, $1 \leq r \leq k + 1 - \iota$. Pour chaque r , $\psi_{b'}$ se prolonge trivialement en un caractère ψ_r de J_r et (J_r, ψ_r) est une paire décomposée (7.3).

Fixons $1 \leq r \leq k - \iota$ et supposons que π contienne ψ_r . Comme J_{r+1}/J_r est abélien, isomorphe à $N_{2a}(k - r - 1)/N_{2a}(k - r)$, il existe un caractère θ de J_{r+1} trivial sur J_r tel que π contienne $\psi_{r+1}\theta = \psi_{\tilde{b}'}$ avec $\tilde{b}' = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \beta & 0 & -\mu \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathfrak{p}_E^{r-k+1}$ de trace nulle. Alors quitte à conjuguer π par $u^-(0, (2\mu)^{-1}\beta) \in U_0(\mathcal{L})$ qui normalise $J(\mathcal{L})$ et $(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2})|_{J_{L,k}}$, on peut supposer que π contient ψ_{r+1} . Comme par hypothèse π contient ψ_1 , une de ses conjuguées contient $\psi_{k+1-\iota}$.

Si $\iota = 0$, (J_{k+1}, ψ_{k+1}) forme une paire couvrante (7.6.1) donc π contient une paire couvrante.

(ii) Si $\iota = 1 < k$, on considère la paire couvrante (J_{k+1}, ψ_{k+1}) où $J_{k+1} = J^-(k' + 2, k + 1)J_{L,k}J^+(k', -1)$ (7.6.1). Le quotient $J_{k+1}/J_k \cap J_{k+1}$ est abélien et ψ_k se prolonge à J_{k+1} en un caractère de la forme $\psi_{\tilde{b}'}$ avec $\tilde{b}' = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ -\gamma & -\lambda & 0 \\ \delta & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathfrak{p}^{-k'}$ et $\delta \in \mathfrak{p}$. On conjugue alors π par $g = u^-(\mu^{-1}\gamma, (2\mu)^{-1}(-\gamma\bar{\gamma}\mu + \delta)) \in G$ qui normalise ψ_k et J_{k+1} car $k > 1$. Le caractère ${}^g\psi_{\tilde{b}'}$ n'est autre que $\psi_{k+1} : {}^g\pi$ contient donc la paire couvrante (J_{k+1}, ψ_{k+1}) .

(iii) Si $\iota = 1 = k$, l'hypothèse signifie que π contient le prolongement trivial ψ de $\psi_{b'|_{J_{L,1}}}$ à $J(\mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la chaîne autoduale de période 2 contenue dans $\mathcal{L}$ (5.7.2). Le groupe $K_1(\mathcal{N})$ est distingué dans $K(\mathcal{N})$ et contenu dans le noyau de $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$. Donc π contient une représentation irréductible de $K(\mathcal{N})$ triviale sur $K_1(\mathcal{N})$ et contenant ψ . Elle est de la forme $\rho_1 \otimes \rho_2$ (cf. lemme 5.7.a (2)) où ρ_1 est une représentation irréductible de $U_0(\mathcal{N}^1)/U_1(\mathcal{N}^1) \simeq U(1, 1)(k_F)$. Si ρ_1 n'est pas cuspidale, elle contient la représentation triviale d'un sous-groupe unipotent de $U(1, 1)(k_F)$ et quitte à conjuguer π par un élément $u^+(0, d) \in U_0(\mathcal{N})$, on peut supposer que ρ_1 contient la représentation triviale du radical unipotent du sous-groupe de Borel $B^1(k_F)$ de $U(1, 1)(k_F)$ formé des matrices triangulaires supérieures ou celui de son opposé $\bar{B}^1(k_F)$ par rapport au tore des matrices diagonales. Plaçons-nous dans le deuxième cas : la restriction de ρ_1 à $\bar{B}^1(k_F)$ est semi-simple et contient une représentation irréductible, triviale sur le radical unipotent de $\bar{B}^1(k_F)$ donc de dimension 1. Notons-la ψ_1 . En revenant à $K(\mathcal{N})$, $\rho_1 \otimes \rho_2$ contient le caractère $\psi_1 \otimes \psi_{b_2}$, trivial sur $J^-(1, 1)$ et $J^+(1, 0)$. Sa restriction au groupe $J^-(1, 1)J_{L,1}J^+(1, 0)$ prolonge trivialement $(\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2})|_{J_{L,1}}$ et on obtient ainsi une paire couvrante contenue dans π . Dans le premier cas, on montre de même que π contient le prolongement trivial de $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ à $J^-(1, 2)J_{L,k}J^+(1, -1)$. Il convient alors de conjuguer une nouvelle fois pour que la paire couvrante de groupe $J^-(2, 2)J_{L,k}J^+(0, -1)$

soit contenue dans π .

Pour terminer la démonstration du lemme a., il reste à étudier de façon analogue le cas où $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ est trivial sur $J^-(k' + 1, k)$. Si $k > 1$, on introduit la suite de paires décomposées (J_r, ψ_r) avec $J_r = J^-(k' + 1, k - r)J_{L,k}J^+(k' + 1, k)$ et $0 \leq r \leq k - 1 + \iota$. Comme en (i), quitte à conjuguer π , π contient la paire $(J_{k-1+\iota}, \psi_{k-1+\iota})$. Celle-ci est couvrante si $\iota = 1$. Quand $\iota = 0$, une conjuguée de π contient la paire couvrante de groupe $(J^-(k', 0)J_{L,k}J^+(k' + 1, k))$ au-dessus de $(J_{L,k}, \psi_{b'|J_{L,1}})$ (analogue à (ii)). Quand $k = 1$, on raisonne comme en (iii) en prenant pour $\mathcal{N}$ la chaîne autoduale de période 1.

La dernière étape est la preuve du lemme b. : E est ramifiée sur F et k est impair. Comme pour le lemme a., on considère le groupe $J(\mathcal{L}) = J^-(k' + 1, k)J_{L,k}J^+(k' + 1, k)$, et son caractère $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$. Ce dernier est trivial sur $J^+(k' + 1, k)$.

Supposons $k > 1$. La strate $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}^1}, k - 1, k - 2, b'_1)$ est minimale non scalaire si $-\varpi_F^{k-1} \det b'_1$ n'est pas un carré dans k_F , L -scindée si c'est un carré non nul et non fondamentale sinon. Dans les deux derniers cas, en conjuguant par un élément de $U_0(\mathcal{N}^1)$, on transforme b'_1 en une matrice scalaire ou triangulaire stricte. Par conséquent, si $(\mathcal{L}_{\mathcal{N}^1}, k - 1, k - 2, b'_1)$ n'est pas minimale non scalaire, quitte à conjuguer π par un élément de $U_0(\mathcal{N}^1) \times 1$ qui normalise $J(\mathcal{N})$ (5.7.3), π contient le caractère $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ trivial sur $J^-(k' + 1, k)$ ou $J^+(k' + 1, k - 2)$.

Dans le premier cas, on considère les sous-groupes J_r , pour $0 \leq r < k - 1$ pair, $J_r = J^-(k' + 1, k - r)J_{L,k}J^+(k' + 1, k)$, auxquels $\psi_{b'_1} \otimes \psi_{b_2}$ se prolonge trivialement en ψ_r pour donner une paire décomposée. Le même argument qu'en (i) montre qu'une conjuguée de π contient ψ_{k-1} . Or (J_{k-1}, ψ_{k-1}) est une paire couvrante au-dessus de $(J_{L,k}, \psi_{b'})$.

Dans le deuxième cas, on répète l'argument de (i) avec la suite J_r , r pair variant de 0 à $k + 1$ et $J_r = J^-(k' + 2, k + 2)J_{L,k}J^+(k' + 1, k - r)$, puis celui de (ii) pour atteindre une paire couvrante de groupe $J^-(k' + 2, k + 2)J_{L,k}J^+(k', -1)$ contenue dans π .

Supposons que $k = 1$. En reprenant (iii), si ρ_1 n'est pas cuspidale, π contient le prolongement trivial de $\psi_{b'|J_{L,1}}$ au groupe $J^-(1, 1)J_{L,1}J^+(1, 1)$ ou $J^-(2, 3)J_{L,1}J^+(1, -1)$ et on conclut comme précédemment. $\square$

Annexe : Types cuspidaux des groupes unitaires $U(2)(F)$ et $U(1, 1)(F)$

On calcule les types des classes d'inertie de représentations supercuspidales de niveau strictement positif d'un groupe unitaire en deux variables.

Pour compléter cette liste, on trouve les types des classes d'inertie de représentations de niveau 0 dans [Mor3] (voir aussi le paragraphe 3.) ce qui achève la liste des types de $U(2)(F)$. Dans le cas de $U(1, 1)(F)$, il y a en plus des types induits qui se déduisent de ceux de $SL_2(F)$ [Bl2, 1.2] via l'isomorphisme entre celui-là et le groupe dérivé de celui-ci et [BB, IV.1.3].

A.1 On reprend les notations du 0. en omettant l'indice N quand il vaut 2. Ainsi G désigne $U(2)(F)$ ou $U(1, 1)(F)$. Quand la distinction s'impose, on ajoute l'indice an pour $U(2)(F)$ et qd pour $U(1, 1)(F)$.

Le groupe G_{qd} n'est autre que le groupe des isométries d'une forme hermitienne $\langle, \rangle$ sur V dont l'opposé du déterminant est une norme dans F (G_{an} celui d'une forme hermitienne $\langle, \rangle$ sur V dont l'opposé du déterminant n'est pas une norme dans F).

A.2

(i) Si $G = G_{an}$, G est le stabilisateur de l'unique chaîne de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale dans V . Cette dernière est de période 2 si E est non ramifiée, de période 1 si E est ramifiée. Par conséquent, une strate gauche fondamentale est de la forme $(k\mathcal{L}, kn, kn - 1, b)$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}$ est une chaîne autoduale et $(\mathcal{L}, n, n - 1, b)$ est minimale ou scindée au sens (5.1.1).

(ii) Si $G = G_{qd}$, il existe trois orbites sous G_{qd} de chaînes de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduales, deux de période 1, différenciées par l'invariant d (cf. 1.1), et une de période 2. Un simple calcul montre qu'une chaîne $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{o}_E$ -réseaux autoduale possède une décomposition en somme orthogonale si et seulement si elle est de période 1 si E est non ramifiée, de période 1 et d'invariant $d_{\mathcal{L}}$ pair si E est ramifiée.

Dans une strate gauche $(\Lambda, n, n - 1, b)$ scindée au sens (5.1.1), comme dans une strate non scindée, on peut supposer que Λ est une chaîne.

A.3 Proposition. - *Soit π une représentation lisse irréductible de G de niveau strictement positif.*

(i) *On suppose $G = G_{an}$. Alors π est supercuspidale et contient une strate gauche minimale ou une strate gauche scindée au sens (5.1.1).*

(ii) *On suppose $G = G_{qd}$. Alors $(\pi, \mathcal{V})$ est supercuspidale si et seulement s'il existe un caractère χ de G tel que $(\pi \otimes \chi, \mathcal{V})$ contient une strate gauche minimale non scalaire ou une strate gauche scindée au sens (5.1.1).*

(iii) *On suppose π supercuspidale. On note $(\mathcal{L}, n, n - 1, b)$ une strate gauche minimale non scalaire ou une strate gauche scindée au sens (5.1.1) contenue dans π (ou une tordue de π par un caractère de G). Alors, π est induite à partir du sous-groupe compact ouvert $K = U_1(\mathcal{L})(E[b] \cap G)$ ou $U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L})(E^1 \times E^1)$ et d'une représentation irréductible ρ de ce sous-groupe contenant ψ_b .*

Démonstration. - Le point (i) est évident d'après (A.2(i)).

Dans la situation (ii), considérons une représentation irréductible π contenant la strate fondamentale $(\Lambda, n, n - 1, b)$. Quitte à tordre π par un caractère, on peut supposer que cette strate ne se réduit jamais en une strate scalaire. Si elle n'est pas scindée, π est supercuspidale (proposition 4.1).

Sinon $(\Lambda, n, n - 1, b)$ est scindée (au sens large). Notons $\varphi_b(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$, $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2 \pmod{\mathfrak{p}_E}$, et $V^i = \text{Ker}(y - \alpha_i)$, $i = 1, 2$. En oubliant la forme hermitienne, on a [Ku, lemme 3.5] $V = V^1 \oplus V^2$, $\Lambda = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2$ où $\Lambda^i = \Lambda \cap V^i$ et $b = b_1 \oplus b_2$.

Si V^1 ou V^2 est anisotrope, $(\Lambda, n, n - 1, b)$ est aussi scindée au sens (5.1.1) (remarque 5.1). Alors, l'entrelacement de ψ_b , $\mathcal{E}_G(\psi_b) = J_1(E^1 \times E^1)J_1$ (5.4.1) est compact donc π est supercuspidale.

Si V^1 et V^2 sont isotropes, ils sont totalement isotropes et il existe une base de Witt (e_{-1}, e_1) adaptée à Λ telle que $V^1 = Ee_{-1}$, $V^2 = Ee_1$. Notons L le sous-groupe de Levi stabilisant V^1 et V^2 . Alors la strate $(\Lambda, n, n - 1, b)$ est L -scindée (5.7) : π ne peut être supercuspidale [Le, §5].

Ceci prouve l'assertion (ii).

Soit π une représentation irréductible supercuspidale de G . Ou bien

(a) π (ou l'une de ses tordues) contient une strate fondamentale minimale non scalaire : elle est donc induite à partir du sous-groupe compact ouvert $K = U_1(\mathcal{L})D^1$ et d'une représentation irréductible ρ de ce sous-groupe contenant ψ_b (4.4.1).

Ou bien

(b) π (ou l'une de ses tordues) contient une strate fondamentale $(\Lambda, n, n-1, b)$ scindée au sens (5.1.1) auquel cas π contient une représentation irréductible θ_b d'un sous-groupe ouvert compact J_1 dont l'entrelacement est $J_1(\mathcal{E}_{U(1)(F)}(\psi_{b_1}) \times \mathcal{E}_{U(1)(F)}(\psi_{b_2}))J_1 = J_1(E^1 \times E^1)J_1$ (5.4.1) : puisque $E^1 \times E^1$ normalise J_1 , $J_1(E^1 \times E^1)J_1$ est un sous-groupe ouvert compact K de G et π est l'induite à partir de K d'une représentation ρ contenant θ_b donc ψ_b . Par (5.8), K est aussi égal à $U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L})(E^1 \times E^1)$. $\square$

Remarque. - Que $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ soit non scindée, ne se réduisant pas à une strate scalaire si $G = G_{qd}$, ou scindée au sens (5.1.1), l'entrelacement de ψ_b est contenu dans $U_0(\mathcal{L})$.

En effet, dans le premier cas, $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ se réduit en une strate gauche minimale $(\mathcal{L}', n', n'-1, b')$ avec $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ et $\psi_{b'} = \psi_b|_{U_{n'}(\mathcal{L}')}$ d'où $\mathcal{E}_G(\psi_b) \subset \mathcal{E}_G(\psi_{b'}) \subset U_0(\mathcal{L}') \subset U_0(\mathcal{L})$ sauf si $(\mathcal{L}', n', n'-1, b')$ est scalaire et G quasi-déployé. Le deuxième cas est une conséquence de (5.4.1).

A.4 Dorénavant, $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ désigne une strate gauche minimale non scalaire ou scindée au sens (5.1.1). Sans restriction, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est une chaîne de σ_E -réseaux (lemme 4.2 et A.2). On construit une famille de couples (J, λ) où J est un sous-groupe compact ouvert de G contenant $U_n(\mathcal{L})$ et λ une représentation irréductible de J contenant ψ_b telle que pour toute représentation π irréductible (supercuspidale) contenant $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$, il existe un couple (J, λ) de cette famille qui soit un $[G, \pi]_G$ -type.

On distingue deux cas suivant la forme de la strate $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$.

A.5 $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ est minimale non scalaire.

On refait la construction de 6.1. On se contente ici de rappeler les résultats.

On définit les sous-groupes ouverts compacts

$$H_1 = U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L}) \cdot (1 + \mathfrak{p}_D) \cap G, \quad J_1 = U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}) \cdot (1 + \mathfrak{p}_D) \cap G, \quad J = U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}) \cdot D \cap G$$

où $D = E[b]$ est une extension de degré 2 de E .

Soit θ un prolongement de ψ_b à H_1 et si $J_1 \neq H_1$, $\eta(\theta)$ l'unique représentation de J_1 dont la restriction à H_1 contient θ . Alors θ (resp. $\eta(\theta)$) se prolonge en une représentation λ_θ de J si $J_1 = H_1$ (resp. si $J_1 \neq H_1$).

(A.5.1) Si π est une représentation lisse irréductible de G contenant $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ alors sa classe d'inertie $[G, \pi]_G$ admet un type de la forme (J, λ_θ) pour un prolongement λ_θ de θ (resp. $\eta(\theta)$) à J si $J_1 = H_1$ (resp. si $J_1 \neq H_1$).

Remarque. - Quand E est ramifiée sur F , le cas $J_1 = H_1$ correspond au cas où $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ si G est anisotrope, $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ si G est quasi-déployé.

A.6 $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ est scindée au sens (5.1.1).

On reprend les notations (et résultats) des paragraphes 5.2 et 5.4.

1. On suppose $H_1 = J_1$ (c'est-à-dire n impair).

Soit θ un prolongement à $E^1 \times E^1$ du caractère $\psi_{b_1} \otimes \psi_{b_2}$ de $U_n(\mathcal{L}^1) \times U_n(\mathcal{L}^2)$. Puisque $E^1 \times E^1$ normalise le caractère ψ_b de H_1 et que ψ_b et θ coïncident sur $J_1 \cap (E^1 \times E^1) = U_n(\mathcal{L}^1) \times U_n(\mathcal{L}^2)$, on définit la représentation λ_θ de $J := J_1(E^1 \times E^1)$

par : $\lambda_\theta(j \cdot x) = \psi_b(j)\theta(x)$, $j \in J_1$ et $x \in (E^1 \times E^1)$. Alors $\text{Ind}_J^G \lambda_\theta$ est irréductible : l'entrelacement $\mathcal{E}_G(\lambda_\theta)$ de λ_θ est contenu dans celui de ψ_b , c'est-à-dire $J_1(E^1 \times E^1) = J$ (5.4.1).

(A.6.1) *Si π est une représentation lisse irréductible de G contenant $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ où n est impair, alors sa classe d'inertie $[G, \pi]_G$ admet un type de la forme (J, λ_θ) où θ est un prolongement de $\psi_{b_1} \otimes \psi_{b_2}$ à $E^1 \times E^1$ et λ_θ définie comme ci-dessus.*

Remarque. - Si E est une extension ramifiée de F , alors $\nu_{\mathcal{L}^1}(b_1)$ est nécessairement impair. En effet, par (A.2(i)), la valuation $\nu_{\mathcal{L}^1}$ coïncide avec celle de E et b_1 étant un élément de $\text{Lie } U(1)(F)$, est de trace nulle donc de valuation impaire.

2. On suppose $H_1 \neq J_1$ (c'est-à-dire n pair et E non ramifiée sur F).

On définit les sous-groupes compacts ouverts :

$$\tilde{H}_1 = H_1 \cdot ((1 + \mathfrak{p}_E)^1 \times (1 + \mathfrak{p}_E)^1), \tilde{J}_1 = J_1 \cdot ((1 + \mathfrak{p}_E)^1 \times (1 + \mathfrak{p}_E)^1), J = J_1 \cdot (E^1 \times E^1).$$

D'une part, $(1 + \mathfrak{p}_E)^1 \times (1 + \mathfrak{p}_E)^1$ normalise le caractère ψ_b de H_1 : ce dernier se prolonge en un caractère θ de $\tilde{H}_1$.

D'autre part, le groupe fini $\tilde{J}_1/H_2$ est une extension de $\tilde{J}_1/\tilde{H}_1$ par $\tilde{H}_1/H_2$ qui est centrale. En effet, si $j \in J_1$ et $1 + u \in (1 + \mathfrak{p}_E)^1 \times (1 + \mathfrak{p}_E)^1$ alors $(1 + u)j(1 + u)^{-1} \equiv j \pmod{H_2}$: $\tilde{H}_1/H_2$ est central dans $\tilde{J}_1/H_2$ comme H_1/H_2 l'est dans J_1/H_2 (5.4). De plus, $\tilde{J}_1/\tilde{H}_1 \simeq J_1/H_1$ et l'accouplement $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ correspond à celui défini sur J_1/H_1 au lemme 5.4. Il est donc non dégénéré. Ainsi, $\tilde{J}_1/H_2$ est un groupe de Heisenberg. Notons $\eta(\theta)$ l'unique représentation irréductible de $\tilde{J}_1$ dont la restriction à $\tilde{H}_1$ contient θ .

Le groupe J est une extension du groupe $E^1/(1 + \mathfrak{p}_E)^1 \times E^1/(1 + \mathfrak{p}_E)^1$ par $\tilde{J}_1$. Pour que $\eta(\theta)$ se prolonge à J , il suffit [Ca, 5.4] que $\text{pgcd}(|E^1/(1 + \mathfrak{p}_E)^1|, |\tilde{J}_1/\tilde{H}_1|) = 1$, l'autre condition étant clairement satisfaite. Or le premier cardinal vaut $1 + q$ tandis que le second est égal à celui de $\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{12}(\mathcal{L})/\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}+1}^{12}(\mathcal{L}) \simeq k_E$ soit q^2 ($q = |k_F|$). Par suite, $\eta(\theta)$ se prolonge à J et

(A.6.2) *Si π est une représentation lisse irréductible de G contenant $(\mathcal{L}, n, n-1, b)$ où n est pair, alors sa classe d'inertie $[G, \pi]_G$ admet un type de la forme (J, λ_θ) où λ_θ est un prolongement de $\eta(\theta)$ à J et θ un prolongement de ψ_b à $\tilde{H}_1$.*

A.7 Explicitons une liste complète de types cuspidaux de niveau strictement positif de G_{qd} et G_{an} selon que l'extension E est ramifiée ou non sur F et précisons "leur" dimension.

Si E est non ramifiée, cette liste contient toutes les formes de types obtenues précédemment si G est quasi-déployé, les formes A.5.1 (si n est impair) et A.6.2 (si n est pair) si G est anisotrope. Dans les deux cas, la dimension de λ_θ est 1 si n est impair, q si n est pair.

Si E est ramifiée, les listes pour G_{qd} et G_{an} contiennent des types de la forme A.5.1 (n de parité quelconque) et A.6.1 (n impair). La dimension de λ_θ est 1 si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ quand $G = G_{qd}$, $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ quand $G = G_{an}$, q sinon.

Références

- [Bl1] C. BLONDEL, *Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet*, C. R. Acad. Sci.Paris, t.325, Série I (1997), 1149-1152.
- [Bl2] C. BLONDEL, *Une méthode de construction de types induits et son application à G_2* , J. of Algebra 213 (1999), 231-271.
- [Bo] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Ch. 8, Hermann, Paris.
- [Bu] C.J. BUSHNELL, *Representations of reductive p -adic groups: Localization of Hecke algebras and applications*, Prépublication, King's College, 1999.
- [BB] L. BLASCO ET C. BLONDEL, *Types induits des paraboliques maximaux de $Sp_4(F)$ et $GSp_4(F)$* , Ann. Inst. Fourier (6) 49 (1999), 1805-1851.
- [BK1] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Annals of Math. Studies 129, Princeton University Press 1993.
- [BK2] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO, *Supercuspidal representations of $GL(N)$* , prépublication (1996).
- [BK3] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO, *Smooth representations of reductive p -adic groups: structure theory via types*, Proc. London Math. Soc., Vol. 77 (1998), 582-634.
- [BK4] C.J. BUSHNELL AND P.C. KUTZKO, *Semisimple Types in GL_n* , Compositio Math. (1) 119 (1999), 53-97.
- [BT] F. BRUHAT ET J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local I*, Publ. Math. de l'IHES 41 (1972), 1-251.
- [Ca] H. CARAYOL, *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) 17 (1984), 191-225.
- [Ja] D. JABON, *The supercuspidal representations of $U(2, 1)$ and GSp_4 over a local field via Hecke algebra isomorphisms*, Thèse, Univ. of Chicago, 1989.
- [Ku] P. C. KUTZKO, *Toward a classification of the supercuspidal representations of GL_N* , J. London math. Soc. (2), 37 (1988), 265-274.
- [Le] B. LEMAIRE, *Strates scindées pour un groupe réductif p -adique*, C. R. Acad. Sci.Paris, t.326, Série I (1998), 407-410.
- [Mor1] L. E. MORRIS, *Some tamely ramified supercuspidal representations of symplectic groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 63 (1991), 519-551.
- [Mor2] L. E. MORRIS, *Fundamental G -strata for classical groups*, Duke math. Journal 64, n°3 (1991), 501-553.
- [Mor3] L. E. MORRIS, *Level Zero G -types*, Compositio Math. (2) 118 (1999), 135-157.
- [Moy] A. MOY, *Representations of $U(2, 1)$ over a p -adic field*, J. Reine Angew. Math. 372 (1986), 178-208.
- [MP] A. MOY AND G. PRASAD, *Unrefined minimal K -types for p -adic groups*, Inv. Math. 116 (1994), 393-408.
- [PY] S.-Y. PAN AND J.-K. YU, *Unrefined minimal K -types for p -adic classical groups*, prépublication?
- [St1] S.A. STEVENS, *Types and representations of p -adic symplectic groups*, Thèse, King's College, Univ. of London, 1998.
- [St2] S.A. STEVENS, *Intertwining and supercuspidal types for p -adic classical groups*, prépublication, 1999.
- [We] A. WEIL, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1973.

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,
7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex.

blasco@math.u-strasbg.fr

*Institut de
Recherche
mathématique
avancée*

*(Unité Mixte de
Recherche 7501)*

Université Louis Pasteur

IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Téléphone : *secrétariat* 03 88 41 63 05, *bibliothèque* 03 88 41 63 06, *Fax* 03 88 61 90 69

Adresses électroniques : irma@math.u-strasbg.fr, <http://www-irma.u-strasbg.fr/>