CORRESPONDANCE DE LANGLANDS ET FONCTIONS L DES CARRÉS EXTÉRIEUR ET SYMÉTRIQUE

Guy HENNIART

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Mars 2003

IHES/M/03/20

Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique

Guy Henniart

27 mars 2003

Résumé. – Soient p un nombre premier, F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et ψ un caractère additif non trivial de F . La correspondance de Langlands donne une bijection $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ entre les représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne de F , à isomorphisme près, et les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$, à isomorphisme près. Pour certaines représentations r du groupe dual $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ de $\mathrm{GL}_{n/F}$, on sait associer, par voie globale, à une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$, des facteurs $L(\pi, r, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$. On conjecture l'égalité $L(\pi(\sigma), r, s) = L(r \circ \sigma, s)$, et de même pour les facteurs ε , quand σ est une représentation de dimension n du groupe de Weil-Deligne de F . Répondant à une question de D. Jiang et D. Soudry, nous prouvons que si $r = \Lambda^2$ ou $r = \mathrm{Sym}^2$, on a $L(\pi(\sigma), r, s) = L(r \circ \sigma, s)$ et $\varepsilon(\pi(\sigma), r, s, \psi) = \alpha \varepsilon(r \circ \sigma, s, \psi)$, où α est une racine de l'unité.

Abstract. – Let p be a prime number, F a finite extension of $\mathbf{Q}_p$ and ψ a non-trivial additive character of F . The Langlands correspondence is a bijection $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ between degree n representations of the Weil-Deligne group of F , up to isomorphism, and smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}_n(F)$, up to isomorphism. For some representations r of the dual group $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ of $\mathrm{GL}_{n/F}$, local-global methods attach factors $L(\pi, r, s)$ and $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$ to any smooth irreducible representation π of $\mathrm{GL}_n(F)$. Conjecturally we have $L(\pi(\sigma), r, s) = L(r \circ \sigma, s)$, and similarly for the ε -factors, when σ is a degree n representation of the Weil-Deligne group of F . Answering a query of D. Jiang and D. Soudry we show that when $r = \Lambda^2$ or $r = \mathrm{Sym}^2$ we have $L(\pi(\sigma), r, s) = L(r \circ \sigma, s)$ and $\varepsilon(\pi(\sigma), r, s, \psi) = \alpha \varepsilon(r \circ \sigma, s, \psi)$ for some root of unity α .

M.S Class : 22E50

Mots-clefs : correspondance de Langlands, corps locaux, fonctions L , facteurs ε

Key-words : Langlands correspondence, local fields, L -functions, ε -factors

Titre courant : Correspondance de Langlands et fonctions L supérieures

Guy Henniart
Département de Mathématiques
et UMR 8628 du CNRS,
Bâtiment 425, Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex
FRANCE

courriel: Guy.Henniart@math.u-psud.fr

Cet article est issu de discussions avec D. Jiang et D. Soudry lors de la période spéciale sur les formes automorphes organisée à l'IHP (Paris) au printemps 2000, et parrainée entre autres par le réseau européen "Arithmetic Algebraic Geometry". J'ai annoncé les résultats dans une lettre à D. Soudry, et commencé la rédaction lors d'un séjour à l'I.A.S. (Princeton, USA), subventionné en partie par la NSF, alors que je bénéficiais d'un congé pour recherches de l'Université Paris-Sud. Des conversations avec H. Kim et F. Shahidi, lors d'un colloque au CIRM en juin 2002, m'ont été très utiles, ainsi qu'une correspondance ultérieure avec F. Shahidi. L'article n'a pu être terminé que grâce à une délégation au CNRS dont je bénéficie au premier semestre 2002-2003, et l'hospitalité de l'IHES. Que tous, collègues et institutions, soient ici remerciés.

1 Introduction

1.1

Soient p un nombre premier et F une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p -adiques. Fixons une clôture algébrique $\bar{F}$ de F , et notons W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F , et W'_F le groupe de Weil-Deligne. Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{G}_F(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations Φ -semisimples de dimension n de W'_F , et $\mathcal{A}_F(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$.

La correspondance de Langlands [8, 10, 12] donne, pour chaque entier $n \geq 1$, une bijection canonique $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(n)$ sur $\mathcal{A}_F(n)$, qui pour $n = 1$ est donnée par la théorie locale des corps de classes. On peut caractériser l'ensemble de ces bijections par des propriétés naturelles [9, 13]. La plus importante de ces propriétés est communément appelée préservation des facteurs L et ε de paires. Elle s'énonce de la façon suivante: si n et n' sont deux entiers ≥ 1 , on a

$$(*) \quad \begin{cases} L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s) \\ \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \varepsilon(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s, \psi) \end{cases}$$

quels que soient $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$ et $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$ et quel que soit le caractère additif non trivial ψ de F .

Dans ces identités (*), les facteurs de droite sont ceux définis par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [15], ou Shahidi [24, 25], tandis que les facteurs de gauche sont ceux définis par Artin pour le facteur L , et par Langlands et Deligne [5, 30] pour le facteur ε .

1.2

On peut se demander si cette correspondance de Langlands préserve aussi d'autres invariants. Par exemple, fixons un entier $n \geq 1$, et soit r une représentation algébrique de dimension finie m du groupe dual $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ de $\mathrm{GL}_{n/F}$. Pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, on peut représenter σ par un homomorphisme φ de W'_F dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et l'homomorphisme $r \circ \varphi$ définit un élément de $\mathcal{G}_F(m)$, qui ne dépend plus du choix de φ représentant σ , et qu'on note $r \circ \sigma$ ou $r(\sigma)$. Pour certains choix de r , on sait définir, pour $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$, des facteurs analogues $L(\pi, r, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$, et ce, sans faire référence à la correspondance de Langlands [27]. La question naturelle est alors de savoir si pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$ on a

$$(**) \quad \begin{cases} L(r \circ \sigma, s) = L(\pi(\sigma), r, s) \\ \text{et } \varepsilon(r \circ \sigma, s, \psi) = \varepsilon(\pi(\sigma), r, s, \psi). \end{cases}$$

Certains cas sont bien connus. Si l'on prend pour r l'homomorphisme déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$, on a alors $L(\pi, r, s) = L(\omega_\pi, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(\omega_\pi, s, \psi)$, où ω_π est le caractère¹ central de π , et les identités voulues sont bien

1. Pour nous, un *caractère* d'un groupe topologique G est un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{C}^\times$; il est dit unitaire si ses valeurs sont de module 1.

vérifiées. Il en est de même si $r : \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est définie par $r(g) = {}^t g^{-1}$ pour $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$; on a alors $L(\pi, r, s) = L(\pi^\vee, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(\pi^\vee, s, \psi)$, où $\pi^\vee$ est la contragrédiente de π ; les identités découlent du fait que $\pi(\sigma)^\vee = \pi(\sigma^\vee)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$.

1.3

Nous établissons ici d'autres cas particuliers des identités (**), répondant ainsi à des questions de Jiang et Soudry. Le lecteur pourra se reporter à leurs travaux [17, 18] ou à ceux de Kim [19] pour des applications.

Notre résultat principal est le suivant, où l'on note ρ_n la représentation identité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\Lambda^2 \rho_n$ celle donnée par le carré extérieur, $S^2 \rho_n$ celle donnée par le carré symétrique.

Théorème. – *Soit $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$. On a $L(\Lambda^2 \rho_n(\sigma), s) = L(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n, s)$ et $L(S^2 \rho_n(\sigma), s) = L(\pi(\sigma), S^2 \rho_n, s)$. De plus, il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle qu'on ait*

$$\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\sigma), s, \psi) = \alpha \varepsilon(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)$$

et

$$\varepsilon(S^2 \rho_n(\sigma), s, \psi) = \alpha^{-1} \varepsilon(\pi(\sigma), S^2 \rho_n, s, \psi)$$

pour tout caractère non trivial ψ de F .

On conjecture (voir 1.8) bien sûr que α vaut toujours 1. Rappelons que les facteurs ε sont des monômes en q^{-s} , où q est le cardinal du corps résiduel de F . L'exposant de q^{-s} dans $\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\sigma), s, \psi)$, par exemple, s'écrit $a(\Lambda^2 \rho_n(\sigma)) + \dim(\Lambda^2 \rho_n) n(\psi)$, où $a(\Lambda^2 \rho_n(\sigma))$ est l'exposant du conducteur d'Artin de $\Lambda^2 \rho_n(\sigma)$ et $n(\psi)$, le niveau de ψ , est un entier qui ne dépend que de ψ : Si P_F est l'idéal maximal de l'anneau des entiers O_F de F , ψ est trivial sur $P_F^{-n(\psi)}$ mais pas sur $P_F^{-1-n(\psi)}$. De même l'exposant de q^{-s} dans $\varepsilon(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)$ est de la forme $a(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n) + \dim(\Lambda^2 \rho_n) n(\psi)$ pour un entier $a(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n)$ ne dépendant pas de ψ .

Corollaire. – *Pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, on a $a(\Lambda^2 \rho_n(\sigma)) = a(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n)$ et $a(S^2 \rho_n(\sigma)) = a(\pi(\sigma), S^2 \rho_n)$; en particulier $a(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n)$ et $a(\pi(\sigma), S^2 \rho_n)$ sont des entiers positifs.*

1.4

En fait la correspondance de Langlands pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}_{n/F}$ s'étend aussitôt aux groupes réductifs G sur F qui sont produits de tels groupes linéaires, voire de groupes de la forme $\mathrm{Res}_{K/F} \mathrm{GL}_{n/K}$, où K est une extension finie de F . On peut – on doit – donc poser dans ce cadre les questions de 1.2.

Le cas de base est celui où G est produit de $\mathrm{GL}_{n/F}$ et $\mathrm{GL}_{n'/F}$, et où r est la représentation $\rho_n \boxtimes \rho_{n'}^2$ du groupe dual $\hat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_{n'}(\mathbf{C})$ donnée par le produit tensoriel. Une représentation lisse irréductible de $G(F)$ s'écrit comme produit tensoriel $\pi \boxtimes \pi'$, avec $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$ et $\pi' \in \mathcal{A}_F(n')$, et les facteurs L et ε correspondant à r sont ceux notés $L(\pi \times \pi', s)$ et $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$ en 1.1. Les identités analogues à (**) dans 1.2, en ce cas, sont exactement les identités (*) de 1.1 qui caractérisent la correspondance de Langlands.

Le résultat de 1.4 se généralise de la façon suivante. On prend $n' = 1$ et $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$ ou bien $r = S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$. Pour $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$ et $\chi \in \mathcal{A}_F(1)$ (on identifie $\mathcal{A}_F(1)$ à l'ensemble des caractères de $F^\times$), on dispose alors des facteurs $L(\pi \boxtimes \chi, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s)$ et $\varepsilon(\pi \boxtimes \chi, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$, et de même pour S^2 ; si χ est le caractère trivial de $F^\times$, on retrouve les facteurs $L(\pi, \Lambda^2 \rho_n, s)$ et $\varepsilon(\pi, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)$.

Théorème. – Pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$ et $\chi \in \mathcal{G}_F(1)$, on a

$$L(\Lambda^2 \rho_n(\sigma) \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s)$$

et

$$L(S^2 \rho_n(\sigma) \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s),$$

et il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle que

$$\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \varepsilon(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et

$$\varepsilon(S^2 \rho_n(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha^{-1} \varepsilon(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

pour tout caractère additif non trivial ψ de F .

1.5

Il existe encore une situation intéressante où nos méthodes s'appliquent, celui des fonctions L à la Asai (cf. [22]). Dans cette situation, on se donne une extension quadratique K de F . Un élément σ de $\mathcal{G}_K(n)$ donne, par induction tensorielle de W'_K à W'_F , un élément $I(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(n^2)$. D'un autre côté, pour $\pi \in \mathcal{A}_K(n)$ et $\chi \in \mathcal{A}_F(1)$, la méthode de Shahidi permet de définir des facteurs analogues $L(\pi \otimes \chi, I\rho_n \boxtimes \rho_1, s)$ et $\varepsilon(\pi \otimes \chi, I\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$.

Théorème. – Soient $\sigma \in \mathcal{G}_K(n)$ et $\chi \in \mathcal{G}_F(1)$. On a

$$L(I(\sigma) \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), I\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle que

$$\varepsilon(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \varepsilon(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), I\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

2. Si G_1 et G_2 sont deux groupes et π_1, π_2 des représentations de G_1 et G_2 respectivement, nous notons $\pi_1 \boxtimes \pi_2$ la représentation de $G_1 \times G_2$ obtenue par produit tensoriel. Nous réservons la notation $\pi_1 \otimes \pi_2$ au produit tensoriel de deux représentations d'un même groupe G .

quel que soit le caractère additif non trivial ψ de F .

Bien entendu, on peut interpréter ce résultat en termes du L -groupe de $G = \text{Res}_{K/F} \text{GL}_{n/K}$ (voir ch. 5).

Remarque. — On espère que α vaut encore 1 dans les théorèmes de 1.4 et 1.5. On a aussi un corollaire analogue à celui de 1.3 pour les exposants de q^{-s} dans les facteurs ε .

1.6

On démontre ces résultats par une méthode globale semblable à celle de [10] (inspirée en partie par [7]), qui permet d'établir la correspondance de Langlands. Esquissons-la dans le cas de $\Lambda^2 \rho_n$, ce qui simplifie les notations.

On traite d'abord les cas particuliers qui proviennent de situations globales. On suppose que le corps p -adique F est le complété en une place v d'un corps de nombres k . On suppose également que le caractère additif ψ de F est la composante en v d'un caractère Ψ du groupe des classes d'adèles $\mathbf{A}_k/k$. On prend une représentation unitaire σ de W_F , de degré n , qui soit composante en v d'une représentation *irréductible* unitaire Σ du groupe de Weil global W_k de k ; on suppose *surtout* qu'il existe une représentation automorphe cuspidale unitaire Π de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_k)$ qui corresponde à Σ au sens où il existe un ensemble fini S de places de k (qu'on prend contenant v et les places à l'infini) telle que pour une place w de k hors de S , les composants locaux Σ_w, Π_w soient non ramifiés et vérifient

$$\begin{aligned} L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s) &= L(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s) \\ \varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s, \Psi_w) &= \varepsilon(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w) \end{aligned}$$

(cette dernière condition découle de la précédente si Ψ_w est non ramifié, i.e. $n(\Psi_w) = 0$).

En prenant le produit sur *toutes* les places de k des facteurs L locaux, on obtient des fonctions L globales $L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma), s)$ et $L(\Pi, \Lambda^2 \rho_n, s)$, méromorphes sur $\mathbf{C}$, qui vérifient des équations fonctionnelles :

$$L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma), s) = \varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma), s) L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma^\vee), 1 - s)$$

et

$$L(\Pi, \Lambda^2 \rho_n, s) = \varepsilon(\Pi, \Lambda^2 \rho_n, s) L(\Pi^\vee, \Lambda^2 \rho_n, 1 - s),$$

où

$$\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma), s) = \prod \varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s, \Psi_w)$$

et

$$\varepsilon(\Pi, \Lambda^2 \rho_n, s) = \prod \varepsilon(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w),$$

les produits portant sur toutes les places w de k et le résultat, bien défini car tous les facteurs sauf un nombre fini valent 1, ne dépendant du choix de Ψ .

1.7

Hors de S les facteurs locaux de ces deux équations fonctionnelles sont les mêmes. Posant

$$\gamma(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s, \Psi_w) = \varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s, \Psi_w) \frac{L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w^\vee), 1-s)}{L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s)}$$

et

$$\gamma(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w) = \varepsilon(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w) \frac{L(\Pi_w^\vee, \Lambda^2 \rho_n, 1-s)}{L(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s)},$$

on obtient l'identité

$$\prod_{w \in S} \gamma(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_w), s, \Psi_w) = \prod_{w \in S} \gamma(\Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w). \quad (1)$$

Il s'agit alors de simplifier cette identité jusqu'à réduire S à $\{v\}$. Pour cela, on applique le résultat (1) non au couple (Σ, Π) mais à un couple $(\tilde{\chi} \otimes \Sigma, (\chi \circ \det) \otimes \Pi)$, où χ est un caractère de $\mathbf{A}_k^\times / k^\times$ bien choisi, trivial en v , et $\tilde{\chi}$ le caractère de W_k qui correspond à χ par la théorie globale des corps de classes. On obtient l'égalité

$$\prod_{w \in S} \gamma(\Lambda^2 \rho_n(\tilde{\chi}_w \otimes \Sigma_w), s, \Psi_w) = \prod_{w \in S} \gamma((\chi_w \circ \det) \otimes \Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \Psi_w). \quad (2)$$

Le résultat principal de [28] dit qu'on peut choisir χ , assez ramifié à toutes les places $w \in S - \{v\}$, pour que tous les facteurs L à ces places intervenant dans (2) valent 1. Puisque χ_v est trivial, on en déduit l'égalité

$$\gamma(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s, \psi_v) = \alpha(s) \gamma(\Pi_v, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi_v), \quad (3)$$

où α est un monôme $\alpha(s) = uN^{-s}$ $u \in \mathbf{C}^*$, $N \in \mathbf{N}^*$. L'identité $L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s) = L(\Pi_v, \Lambda^2 \rho_n, s)$ en découle : comme Σ_v est unitaire et Π_v tempérée, le facteur L est déterminé par les zéros du facteur γ (voir 3.4–3.5).

Dans les situations que nous utiliserons, on sait par [8, 12] que Σ_v et Π_v se correspondent par la correspondance de Langlands : on a alors

$$L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s) = L(\pi(\Sigma_v), \Lambda^2 \rho_n, s).$$

1.8

On conjecture une propriété dite de “stabilité” des facteurs γ cf. [4, 29] qui impliquerait, toujours sous une hypothèse que χ_w soit assez ramifié en $w \in S - \{v\}$, l'égalité

$$\gamma(\Lambda^2 \rho_n(\tilde{\chi}_w \otimes \Sigma_w), s, \Psi_w) = \gamma((\chi_w \circ \det) \otimes \Pi_w, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi_w).$$

On en déduirait alors

$$\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s, \psi) = \varepsilon(\pi(\Sigma_v), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi).$$

Malheureusement, cette propriété de stabilité n'est pas encore établie. En revanche, on peut appliquer l'égalité (1) à un couple (Σ', Π') obtenu à partir de (Σ, Π) par changements de base cycliques successifs, tous déployés aux places au-dessus de v . On peut choisir ces changements de base de façon que Σ' et Π' ne soient ramifiées, aux places finies, qu'au-dessus de v . On obtient alors

$$\gamma(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s, \psi)^d = \gamma(\pi(\Sigma_v), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)^d,$$

où d est le degré du changement de base total effectué. On en déduit comme précédemment

$$L(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s) = L(\pi(\Sigma_v), \Lambda^2 \rho_n, s)$$

et

$$\varepsilon(\Lambda^2 \rho_n(\Sigma_v), s, \psi) = \alpha \varepsilon(\pi(\Sigma_v), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi), \quad \alpha^d = 1.$$

On a donc obtenu les identités du Théorème 1.3, dans ces cas provenant de situations globales particulièrement bien choisies.

1.9

Le cas général s'en déduit par des méthodes tout à fait analogues à celles de [10] : au chapitre 3, nous montrons que si nous connaissons l'égalité

$$\gamma(\Lambda^2 \rho_n(\sigma), s, \psi)^d = \gamma(\pi(\sigma), \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)^d$$

(pour un entier d qui peut d'ailleurs dépendre de σ), pour un ensemble de représentations σ de W_F qui engendre le groupe de Grothendieck de ces représentations, alors le théorème 1.3 (pour $r = \Lambda^2$) s'ensuit pour tout élément σ de $\mathcal{G}_F(n)$. L'outil pour ce faire est la propriété dite "d'inductivité" des facteurs γ définis par Shahidi ([27], Thm. 3.5) ; cette propriété décrit le comportement des facteurs $\gamma(\pi, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi)$ par induction parabolique : elle correspond ici simplement au fait que si σ_1 et σ_2 sont deux représentations de W_F , alors $\Lambda^2(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ est isomorphe à $\Lambda^2 \sigma_1 \oplus (\sigma_1 \otimes \sigma_2) \oplus \Lambda^2 \sigma_2$. Grâce à [11, 12], la méthode globale fournit assez de cas particuliers pour obtenir le cas général.

1.10

Le plan de l'article est le suivant. On consacre le chapitre 2 à des rappels sur les facteurs γ de Shahidi [27], ainsi qu'à des renseignements complémentaires. Ces compléments, seulement sous-jacents à [27], sont établis dans l'article [14], compagnon de celui-ci. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à la preuve du théorème 1.4 dans le cas de $\Lambda^2 \rho_n \otimes \rho_1$ (on montre aussi en 3.4 comment en déduire celui de $S^2 \rho_n \otimes \rho_1$). Dans le chapitre 3 on admet les cas particuliers obtenus par voie globale, comme esquissé plus haut, et on en déduit le cas général. Ces cas particuliers sont établis dans le chapitre 4. Enfin, le chapitre 5 traite, selon les mêmes principes, des fonctions L à la Asai.

2 Les facteurs γ de Shahidi

2.1

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F , quasi-déployé. Posons $G = \mathbf{G}(F)$ et notons ${}^L G$ le L -groupe de F [21, 2]. Pour certaines représentations algébriques r de ${}^L G$, Shahidi a associé ([27], en particulier Thm. 3.5), à tout caractère additif non trivial ψ de F et à toute représentation lisse irréductible générique π de G , un facteur $\gamma(\pi, r, s, \psi)$, qui ne dépend de π que par sa classe d'isomorphisme, et est une fraction rationnelle en q^{-s} . Il prouve l'équation fonctionnelle

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) \gamma(\pi^\vee, r, 1 - s, \bar{\psi}) = 1 ,$$

où $\pi^\vee$ est la représentation contragrédiente de π . Il montre aussi qu'on peut définir un facteur $L(\pi, r, s)$, indépendant de ψ , de la forme $P(q^{-s})^{-1}$ pour un polynôme P à coefficients complexes de terme constant 1, de sorte qu'on ait [loc. cit. § 7.3]

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(\pi, r, s, \psi) \frac{L(\pi^\vee, r, 1 - s)}{L(\pi, r, s)} ,$$

où le facteur ε est un monôme en q^{-s} qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varepsilon(\pi, r, s, \psi) \varepsilon(\pi^\vee, r, 1 - s, \bar{\psi}) = 1 .$$

2.2

Les représentations r sont obtenues de la façon suivante. On considère un groupe réductif connexe $\mathbf{H}$ sur F , quasi-déployé lui aussi, un sous-groupe parabolique F -rationnel $\mathbf{P}$ de $\mathbf{H}$, et un isomorphisme de $\mathbf{G}$ avec le quotient de Levi de $\mathbf{P}$. Alors le L -groupe ${}^L G$ de G agit sur l'algèbre de Lie du radical unipotent du sous-groupe parabolique ${}^L P$ de ${}^L H$ correspondant à $P = \mathbf{P}(F)$. On peut prendre pour r , en 2.1, n'importe quel composant irréductible d'une telle action: si r est la représentation qu'il note $r_{\tilde{w}, i}$ [loc. cit. § 3], alors Shahidi écrit $\gamma_i(s, r, \psi, \tilde{w})$ ce que nous notons $\gamma(\pi, r, s, \psi)$.

Les facteurs ainsi définis ne dépendent vraiment que de la classe d'isomorphisme de r , et non des autres choix effectués, de $\mathbf{H}$ ou $\mathbf{P}$ par exemple. C'est d'ailleurs un point essentiel quand on prouve l'existence de ces facteurs γ [loc. cit. § 4].

N.B. – Dans la suite, nous noterons par la même lettre un groupe algébrique linéaire défini sur F et le groupe de ses points F -rationnels (cf. [3], p. 153).

2.3

Il nous faut préciser la notion de représentation lisse irréductible *générique* de G . Elle dépend du choix d'un sous-groupe de Borel F -rationnel B de G et d'un caractère non dégénéré χ du radical unipotent U de B . Une représentation lisse irréductible π de G est dite χ -*générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ

sur l'espace V_π de π qui vérifie $\lambda(\pi(u)v) = \chi(u)\lambda(v)$ pour $u \in U$ et $v \in V_\pi$; une telle forme est alors unique à multiplication près par un scalaire. Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons χ comme fixé. Cependant, dans les cas qui nous intéressent, le groupe G est produit de groupes de la forme $\mathrm{GL}_d(K)$, où K est une extension finie de G . Pour de tels groupes, B agit transitivement sur l'ensemble des caractères non dégénérés de U , de sorte que si π est χ -générique pour un choix de χ , il l'est pour tout choix de χ , et les facteurs $\gamma(\pi, r, s, \psi)$ ne dépendent pas de ce choix. On peut d'ailleurs, pour ce genre de groupes G , définir les facteurs $\gamma(\pi, r, s, \psi)$, et de même des facteurs L et ε pour toute représentation lisse irréductible π de G : voir ci-dessous 2.11, Rem. 2.

Remarques. – 1) On se reportera à [14] pour une discussion du cas général, où G n'est plus nécessairement produit de groupes linéaires.

2) Si une représentation lisse et irréductible π de G est χ -générique, alors sa contragrédiente $\pi^\vee$ est $\bar{\chi}$ -générique. D'autre part, si r est l'une des représentations de ${}^L G$ pour lesquelles Shahidi définit $\gamma(\pi, r, s, \psi)$, sa contragrédiente $r^\vee$ en est une également et on a ([27], p. 305, bas de la page)

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \gamma(\pi^\vee, r^\vee, s, \psi).$$

Dans le cas où G est produit de groupes linéaires, il suffit de remarquer que composer avec l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de G transforme π en $\pi^\vee$ et r en $r^\vee$, à isomorphisme près.

2.4

Si π est une représentation lisse irréductible χ -générique de G , on peut ramener le calcul des facteurs $\gamma(\pi, r, s, \psi)$ à celui de facteurs du même genre pour un sous-groupe de Levi M de G , et une représentation lisse irréductible supercuspidale de M .

Pour expliquer cela, fixons un tore déployé maximal A dans B , et considérons un sous-groupe parabolique F -rationnel P de G contenant B ; notons M le sous-groupe de Levi de P contenant A . Le groupe réductif M est quasi-déployé, le groupe $M \cap B$ est un sous-groupe de Borel de M , et $M \cap U$ est son radical unipotent; la restriction de χ à $M \cap U$ est un caractère non dégénéré χ_M de $M \cap U$.

Soit ρ une représentation lisse irréductible de M , et soit $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ la représentation de G obtenue par induction parabolique unitaire. Si cette induite a un sous-quotient irréductible χ -générique, alors ρ est χ_M -générique; réciproquement, si ρ est χ_M -générique, l'induite $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ a un unique sous-quotient χ -générique [23].

Par ailleurs, P correspond à un sous-groupe parabolique ${}^L P$ de ${}^L G$, et ${}^L M$ apparaît comme un sous-groupe de Levi de ${}^L P$. La restriction de r à ${}^L M$ est somme de représentations irréductibles r_i , $i = 1, \dots, k$. Si ρ est une représentation lisse irréductible χ_M -générique et π l'unique sous-quotient irréductible χ -générique de $\mathrm{Ind}_P^G \rho$, alors chacun des facteurs $\gamma(\rho, r_i, s, \psi)$ est défini

et leur produit vaut $\gamma(\pi, r, s, \psi)$. C'est la propriété d'inductivité des facteurs γ de ([24], Thm. 3.5), réinterprétée comme dans [14].

2.5

Dans un cas particulier important, on peut prendre pour P le sous-groupe de Borel B lui-même, auquel cas on note D son sous-groupe de Levi, qui est le tore centralisateur de A .

Notons I un sous-groupe d'Iwahori de G ; on sait que les sous-groupes d'Iwahori de G sont tous conjugués. On considère une représentation lisse irréductible π de G ayant un vecteur non nul fixé par I . Alors π est sous-quotient d'une induite $\text{Ind}_B^G \rho$, où ρ est un caractère de D qui est non ramifié, c'est-à-dire trivial sur le sous-groupe compact maximal de D . Un tel caractère correspond à un homomorphisme admissible $W_F \rightarrow {}^L D$ [2] d'où, par composition avec l'inclusion de ${}^L D$ dans ${}^L G$, un homomorphisme $\sigma : W_F \rightarrow {}^L G$ qui, puisque ρ est non ramifié, est trivial sur le sous-groupe d'inertie I_F de W_F . En ce cas, si π est χ -générique, on a ([27], Thm. 3.5)

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \gamma(r \circ \sigma, s, \psi).$$

Remarques. – 1) En fait nous montrerons en [14] que ce résultat reste valable pour tout caractère ρ de D , pas forcément non ramifié. Cela sera utilisé en 4.5.

2) Supposons un instant que G soit non ramifié, c'est-à-dire déployé sur une extension non ramifiée de F , et notons K un sous-groupe compact maximal hyperspécial de G . Si π est une représentation lisse irréductible de G qui est non ramifiée, i.e. qui a un vecteur non nul fixé par K , alors π apparaît comme l'unique sous-quotient non ramifié d'une induite $\text{Ind}_B^G \rho$ comme précédemment. On *définit* alors

$$L(\pi, r, s) = L(r \circ \sigma, s)$$

et

$$\varepsilon(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(r \circ \sigma, s, \psi).$$

(Noter que si $n(\psi) = 0$ alors $\varepsilon(\pi, r, s, \psi) = 1$.) Supposons qu'en outre π soit χ -générique. Alors on a deux définitions possibles de $\gamma(\pi, r, s, \psi)$: l'une par ([27], Thm. 3.5) qui donne $\gamma(\pi, r, s, \psi) = \gamma(r \circ \sigma, s, \psi)$ l'autre par

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(\pi, r, s, \psi) \frac{L(\pi^\vee, r, 1-s)}{L(\pi, s)}.$$

Mais comme $\pi^\vee$ est l'unique sous-quotient non ramifié de $\text{Ind}_B^G(\rho^\vee)$, on obtient $L(\pi^\vee, s) = L(r \circ \sigma^\vee, s)$ et ces deux définitions donnent le même résultat. En fait le facteur $L(\pi, r, s)$ coïncide aussi avec celui que Shahidi définit à partir de $\gamma(\pi, r, s, \psi)$ (voir 2.11, remarques, et 3.5).

2.6

Dans [14], on complète et précise les résultats de Shahidi ([27], Prop. 3.2 et Prop. 3.4, par exemple) en donnant le comportement des facteurs γ quand on change le caractère additif ψ .

Pour $a \in F^\times$, on note ψ^a le caractère additif $x \mapsto \psi(ax)$ de F ; en particulier, on a $\bar{\psi} = \psi^{-1}$.

Soit Z le tore déployé maximal dans le centre de G . Le L -groupe ${}^L Z = \hat{Z} \times W_F$ apparaît comme quotient de ${}^L G$. Le déterminant de la représentation r de ${}^L G$ est un homomorphisme $\det r : {}^L G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ qui se factorise par un caractère $\hat{Z} \times W_F \rightarrow \mathbf{C}^\times$

$$(z, w) \mapsto \delta_r(z) \varepsilon_r(w).$$

Le caractère ε_r de W_F correspond par la théorie des corps de classes à un caractère $\tilde{\varepsilon}_r$ de $F^\times$, et le caractère algébrique δ_r donne un sous-groupe à un paramètre $\tilde{\delta}_r : F^\times \rightarrow Z$.

Si π est une représentation lisse irréductible χ -générique de G , et si ω_π désigne le caractère central de π , on a, pour $a \in F^\times$,

$$\gamma(\pi, r, s, \psi^a) = \omega_\pi(\tilde{\delta}_r(a)) \tilde{\varepsilon}_r(a) |a|_F^{(s-\frac{1}{2}) \dim r} \gamma(\pi, r, s, \psi),$$

où $|\cdot|_F$ désigne la valeur absolue normalisée de F , qui vaut q^{-1} sur les uniformisantes.

Remarques. – 1) Si $\sigma : W_F' \rightarrow {}^L G$ est un homomorphisme admissible, on a

$$\gamma(r \circ \sigma, s, \psi^a) = \det(r \circ \sigma)(a) |a|_F^{(s-\frac{1}{2}) \dim r} \gamma(r \circ \sigma, s, \psi)$$

et bien sûr la formule précédente en est l'exact analogue, pour les représentations de G .

2) On a $|a|_F = q^{-v_F(a)}$, où v_F est la valuation normalisée de F , et $n(\psi^a) = n(\psi) + v_F(a)$. De la formule précédente, on voit bien que $\gamma(\pi, r, s, \psi)$ est de la forme $\alpha \cdot q^{-(a(\pi, r) + (\dim r)(n(\psi)))}$ où $a(\pi, r)$ ne dépend pas de ψ .

2.7

Il nous sera également utile de savoir, toujours suivant [14], comment se modifie le facteur γ si l'on tord π par un caractère non ramifié, ce qui précise ([27], Thm. 3.5, formule 3.12). Notons T le tore déployé maximal quotient de G . Alors $\hat{T}$ est un sous-groupe central de ${}^L G$ et, comme r est irréductible, le tore $\hat{T}$ agit dans r par un caractère algébrique $\chi_r : \hat{T} \rightarrow \mathbf{C}^\times$ qui correspond à un sous-groupe à un paramètre $\tilde{\chi}_r : F^\times \rightarrow T$.

Si $\tilde{\alpha}$ est un caractère de T , on peut tordre toute représentation π de G par $\tilde{\alpha}$; on obtient une représentation de G notée $\tilde{\alpha} \pi$, qui est lisse et irréductible si π l'est.

Si $\tilde{\alpha}$ est non ramifié, alors $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\chi}_r$ est de la forme $x \mapsto |x|_F^{s(\tilde{\alpha}, r)}$ pour un nombre complexe $s(\tilde{\alpha}, r)$, et on a

$$\gamma(\tilde{\alpha} \pi, r, s, \psi) = \gamma(\pi, r, s + s(\tilde{\alpha}, r), \psi)$$

pour toute représentation lisse irréductible χ -générique π de G . Nous calculerons plus loin $s(\tilde{\alpha}, r)$ dans les cas qui nous intéressent.

Remarque. – Le caractère $\tilde{\alpha}$ de T correspond à un homomorphisme non ramifié $\alpha : W_F \rightarrow \hat{T}$ et la formule précédente reflète les identités

$$\gamma(r \circ (\sigma \otimes \alpha), s, \psi) = \gamma(r \circ \sigma) \otimes (\chi_r \circ \alpha), s, \psi = \gamma(r \circ \sigma, s + s(\tilde{\alpha}, r), \psi).$$

2.8

Puisque nous venons d'examiner la torsion par les caractères non ramifiés, il est naturel de décrire ici la propriété de “stabilité” des facteurs γ mentionnée en 1.8. Il s'agit d'une conjecture qui dit, grosso modo, que les facteurs γ sont faciles à calculer, pourvu que l'on torde la représentation qu'on considère par un caractère suffisamment ramifié. Cette propriété correspond à un résultat sur les représentations de groupes de Weil [6], que nous décrivons d'abord.

Si η est un caractère de $F^\times$ dont l'exposant du conducteur est $a(\eta)$, il existe un élément $c = c(\eta, \psi)$ de $F^\times$, de valuation $-a(\eta) - n(\psi)$, tel qu'on ait $\eta(1+x) = \psi(cx)$ pour $x \in F$ de valuation $\geq a(\eta)/2$.

Si σ est une représentation de W'_F , alors pour tout caractère η de $F^\times$ d'exposant assez grand, on a

$$L(\sigma \otimes \eta, s) = L(\sigma^\vee \otimes \eta^{-1}, s) = 1$$

$$\varepsilon(\sigma \otimes \eta, s, \psi) = \det \sigma(c(\eta, \psi))^{-1} \varepsilon(\eta, s, \psi)^{\dim \sigma}$$

(on a noté η , par abus, le caractère de W_F correspondant au caractère η de $F^\times$). On peut d'ailleurs préciser la condition sur l'exposant ([6], Thm.).

Pour comprendre le versant galoisien de la propriété de stabilité des facteurs γ , prenons un homomorphisme admissible $\sigma : W'_F \rightarrow {}^L G$ et appliquons le résultat précédent à $r \circ \sigma$, en tordant σ par un caractère obtenu de la façon suivante : on prend un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^\times \rightarrow \hat{T}$, un caractère η de W_F et on tord σ par $\lambda \circ \eta$; alors on a

$$r(\sigma \otimes (\lambda \circ \eta)) = (r \circ \sigma) \otimes (\chi_r \circ \lambda \circ \eta)$$

avec la notation χ_r de 2.7. On peut alors appliquer le résultat précédent dès que $\chi_r \circ \lambda \circ \eta$ a un exposant assez grand ; si $\chi_r \circ \lambda$ n'est pas trivial, on le peut dès que η lui-même a un exposant assez grand.

2.9

Décrivons maintenant l'analogie de 2.8 pour les facteurs $\gamma(\pi, r, s, \psi)$.

On fixe une représentation lisse irréductible χ -générique π de G et un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^\times \rightarrow \hat{T}$, correspondant à un homomorphisme $\lambda^\vee : T \rightarrow F^\times$, qu'on peut voir aussi comme un homomorphisme $\lambda^\vee$ de G dans $F^\times$. On suppose que $\chi_r \circ \lambda$ n'est pas trivial. On conjecture ("stabilité") que, dès que le caractère η de $F^\times$ a un exposant assez grand, alors

$$\gamma(\pi \otimes (\eta \circ \lambda^\vee), r, s, \psi)$$

est un monôme en q^{-s} , et, plus précisément,

$$\gamma(\pi \otimes (\eta \circ \lambda^\vee), r, s, \psi) = \omega_\pi(\tilde{\delta}_r(c))^{-1} \tilde{\varepsilon}_r(c)^{-1} \gamma(\eta \circ \lambda^\vee \circ \tilde{\chi}_r, s, \psi)^{\dim r}$$

où $c = c(\eta, \psi)$, les notations $\tilde{\chi}_r, \tilde{\delta}_r, \tilde{\varepsilon}_r$ venant de 2.6 et 2.7.

Le résultat principal de [28] est le suivant. On suppose que r est composant irréductible de l'action de ${}^L G$ sur l'algèbre de Lie du radical unipotent de ${}^L P$, comme en 2.2. On prend $\lambda^\vee : G \rightarrow F^\times$ donné par $g \mapsto \det_{\text{Lie}(N)}(\text{Ad}(g))$ où N est le radical unipotent de P . Alors si η a un exposant assez grand, $\gamma(\pi \otimes (\eta \circ \lambda^\vee), r, s, \psi)$ est un monôme en q^{-s} .

Remarques. – 1) On vérifie que $\chi_r \circ \lambda$ n'est pas trivial. Voir les calculs de 2.11 pour les cas qui nous intéressent.

2) Voir [29] pour des progrès vers la conjecture de stabilité.

2.10

Avant de passer aux facteurs L , il convient de mentionner la propriété globale ([27], Thm. 3.5 4)) qui mène à une caractérisation des facteurs γ [loc. cit., § 5].

Tout d'abord, une théorie tout à fait analogue à ce qui précède existe si l'on prend pour F un corps local *archimédien*. On considère alors des $(\mathcal{G}, K)$ -modules admissibles irréductibles π de $G = \mathbf{G}(F)$. Mais en ce cas, à un tel module π est associée une représentation σ du groupe de Weil de F , et on a

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \gamma(r \circ \sigma, s, \psi),$$

où $\gamma(r, \sigma, s, \psi)$ est le facteur galoisien de la représentation linéaire $r \circ \sigma$ de W_F :

$$\gamma(r \circ \sigma, s, \psi) = \varepsilon(r \circ \sigma, s, \psi) \frac{L(r \circ \sigma^\vee, 1-s)}{L(r \circ \sigma, s)}.$$

Ensuite, on peut considérer une situation globale et on obtient une équation fonctionnelle reliant les facteurs γ locaux. Plus précisément, on fixe un corps de nombres k , une clôture algébrique $\bar{k}$ de k , et un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbf{A}_k/k$. On considère un groupe réductif connexe G sur F , quasi-déployé. On fixe comme plus haut un sous-groupe de Borel B de G , de radical unipotent U , et un caractère non dégénéré χ de $U(\mathbf{A}_k)/U(k)$. Pour chaque place v de

k , Ψ définit par restriction un caractère additif non trivial Ψ_v de k_v , et χ un caractère non dégénéré χ_v de $U(k_v)$. Pour presque toute place v , $G_v = G(k_v)$ est non ramifié sur k_v .

On considère une représentation automorphe *cuspidale* χ -générique Π de $G(\mathbf{A}_k)$; pour chaque place v de k le composant local Π_v est χ_v -générique. On choisit un ensemble fini S de places de k tel que, pour v hors de S , v soit finie, G_v soit non ramifié, Π_v et Ψ_v également (i.e. $n(\Psi_v) = 0$). Alors on a l'équation fonctionnelle

$$\prod_{v \notin S} L(\Pi_v, r_v, s) = \prod_{v \in S} (\Pi_v, r_v, s, \Psi_v) \prod_{v \notin S} L(\Pi_v^\vee, r_v, 1 - s)$$

pour toute représentation r de ${}^L G$ considérée par Shahidi, r_v désignant la représentation de ${}^L G_v$ déduite de l'inclusion de W_{k_v} dans le groupe de Weil W_k de $\bar{k}$ sur k .

Remarque. – Aggrandir S donne une équation fonctionnelle équivalente.

2.11

Il s'agit maintenant de définir les facteurs $L(\pi, r, s)$, dans la situation de 2.2–2.3. Pour cela Shahidi procède en plusieurs étapes, utilisant la classification de Langlands ([27], § 6). Revenons donc aux notations de 2.2–2.3.

Soit π une représentation lisse irréductible χ -générique π de G . On considère $\gamma(\pi, r, s, \psi)$ comme une fraction rationnelle $R(q^{-s})$ et on écrit R sous la forme (unique) suivante :

$$R(X) = \alpha X^a \frac{P(X)}{Q(X)} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbf{C}^\times, a \in \mathbf{Z},$$

les polynômes P et Q de $\mathbf{C}[X]$ étant premiers entre eux et vérifiant $P(0) = Q(0) = 1$.

Si π est *tempérée*, on pose $L(\pi, r, s) = P(q^{-s})^{-1}$; on prouve que cela ne dépend pas du choix de ψ .

Si π est tempérée et que $\tilde{\alpha}$ est un caractère non ramifié de T comme en 2.7, on a vu que

$$\gamma(\pi \tilde{\alpha}, r, s, \psi) = \gamma(\pi, r, s + s(\tilde{\alpha}, r), \psi).$$

Si $\tilde{\alpha}$ est unitaire, $\pi \tilde{\alpha}$ est encore tempérée, et on a donc

$$L(\pi \tilde{\alpha}, r, s) = L(\pi, r, s + s(\tilde{\alpha}, r)).$$

Si $\tilde{\alpha}$ n'est pas nécessairement unitaire, on définit encore $L(\pi \tilde{\alpha}, r, s)$ par cette formule, ce qui définit $L(\pi, r, s)$ sans ambiguïté pour π *essentiellement tempérée*.

Dans le cas général une représentation lisse irréductible π de G apparaît comme quotient de Langlands d'une représentation induite $\text{Ind}_M^G \rho$ comme en

2.4, où ρ est essentiellement tempérée. Ici π est χ -générique, donc ρ est χ_M -générique et avec les notations de 2.4 on a

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \prod_{i=1}^r \gamma(\rho, r_i, s, \psi).$$

On pose alors

$$L(\pi, r, s) = \prod_{i=1}^r L(\rho, r_i, s).$$

Cela ne dépend pas des choix effectués, ni de ψ , et on définit $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$ par l'égalité

$$\gamma(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(\pi, r, s, \psi) \frac{L(\pi^\vee, r, 1-s)}{L(\pi, r, s)}.$$

Remarques. – 1) Si π est à la fois χ -générique et non ramifiée, il est *a priori* possible que les définitions de $L(\pi, r, s)$ données en 2.5 remarque et ci-dessus en 2.9 ne coïncident pas. En fait elles coïncident, nous reviendrons sur ce point à l'occasion. Dans les cas qui nous intéressent c'est une conséquence de notre théorème principal (cf. 3.5).

2) Dans les cas qui nous intéressent, G est produit de groupes linéaires, toute représentation lisse irréductible essentiellement tempérée est générique, et on définit, comme dans la dernière étape ci-dessus, des facteurs $L(\pi, r, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$ pour *toute* représentation lisse irréductible π de G . Pour les représentations r que nous traitons, il découle de nos théorèmes qu'ils coïncident avec ceux de 2.5 remarque, pour π non ramifiée.

2.12

Pour traiter les facteurs L des carrés extérieur et symétrique, nous aurons besoin d'un certain nombre de groupes réductifs G et de représentations r de ${}^L G$. Nous repoussons au chapitre 5 le cas des fonctions L à la Asai.

Notons, comme précédemment, ρ_n la représentation identité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et 1_n la représentation triviale. Nous traiterons principalement les cas suivants :

- (1) $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$.
- (2) $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, $r = S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$.
- (3) $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, $r = \rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1$.

Dans chacun de ces cas, le L -groupe de G est produit direct du groupe dual $\hat{G}$ et de W_F et la représentation r est triviale sur W_F ; nous n'avons indiqué que sa restriction à $\hat{G}$.

Nous examinerons aussi les trois situations analogues, mais plus simples, où l'on omet le dernier facteur GL_1 ; en fait nous montrerons comment réduire ces dernières aux précédentes. Notons les résultats

$$\det(\Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1) = (\det \rho_n)^{n-1} \boxtimes \rho_1^{n(n-1)/2}$$

$$\det(S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1) = (\det \rho_n)^{n+1} \boxtimes \rho_1^{n(n+1)/2}$$

et

$$\det(\rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1) = (\det \rho_n)^m \boxtimes (\det \rho_m)^n \otimes \rho_1^{mn}.$$

2.13

On en déduit facilement les calculs de ε_r , δ_r , $s(\tilde{\alpha}, r)$ et χ_r dans chacun des cas considérés. Nous donnons ci-après les résultats, en incluant le facteur GL_1 : l'omettre produit l'effet évident.

Pour $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, on a des identifications composante par composante $Z = T = F^\times \times F^\times$, $\hat{Z} = \hat{T} = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$.

Pour $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$, ε_r est trivial et on a

$$\delta_r(z_1, z_2) = \lambda^\vee(z_1, z_2) = z_1^{n-1} z_2^{n(n-1)/2}$$

$$\chi_r(z_1, z_2) = z_1^2 z_2$$

$$\tilde{\chi}_r(x) = (x^2, x).$$

Si $\tilde{\alpha}$ est donné par $(x, y) \mapsto |x|_F^{s_1} |y|_F^{s_2}$ (avec $s_1, s_2 \in \mathbf{C}$) on a $s(\tilde{\alpha}, r) = 2s_1 + s_2$.

Pour $r = S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$, ε_r est trivial et on a

$$\delta_r(z_1, z_2) = \lambda^\vee(z_1, z_2) = z_1^{n+1} z_2^{n(n+1)/2};$$

χ_r , $\tilde{\chi}_r$, $s(\tilde{\alpha}, r)$ sont donnés par les mêmes formules que précédemment.

Pour $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, on identifie

$$Z = T = F^\times \times F^\times \times F^\times, \quad \hat{Z} = \hat{T} = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times.$$

Pour $r = \rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1$, ε_r est trivial et on calcule

$$\delta_r(z_1, z_2, z_3) = \lambda^\vee(z_1, z_2, z_3) = z_1^m z_2^n z_3^{mn}$$

$$\chi_r(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3$$

$$\tilde{\chi}_r(x) = (x, x, x).$$

Si $\tilde{\alpha}$ est donné par $(x, y, z) \mapsto |x|_F^{s_1} |y|_F^{s_2} |z|_F^{s_3}$ (avec $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{C}$) on a $s(\tilde{\alpha}, r) = s_1 + s_2 + s_3$.

2.14

Indiquons les groupes $\mathbf{H}$ et $\mathbf{P}$ utilisés pour obtenir, selon 2.2, les représentations r précédentes. Nous pouvons être brefs en renvoyant à [1]. Pour $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$, H est le groupe déployé $G\mathrm{Spin}_{2n}$, son groupe dual étant $G\mathrm{SO}_{2n}$, pour $r = S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$, $H = G\mathrm{SO}_{2n+1}$, $\hat{H} = G\mathrm{Sp}_{2n}$ (ces groupes sont décrits précisément dans [1]). Le sous-groupe parabolique P est le sous-groupe parabolique maximal obtenu en omettant la dernière racine simple ; géométriquement c'est le stabilisateur d'un sous-espace totalement isotrope maximal. Remarquons

qu'Asgari obtient, avec nos notations, $\Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1^{-1}$; pour obtenir $\Lambda^2 \rho \boxtimes \rho_1^{-1}$ il suffit de composer avec l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de GL_1 ; de même pour $S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$.

Dans le troisième cas $H = \mathrm{GL}_{n+m} \times \mathrm{GL}_1$, $\hat{H} = \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$; on prend pour P le groupe $P_0 \times \mathrm{GL}_1(F)$ où P_0 est formé des matrices de $\mathrm{GL}_{n+m}(F)$ triangulaires par blocs de tailles $n \times n$ et $m \times m$; on identifie $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$ au sous-groupe de Levi diagonal de P par $(A, B, \lambda) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda A, {}^t B^{-1}, \lambda)$.

Pour traiter les trois situations analogues où le facteur GL_1 est omis, il suffit de prendre respectivement $H = \mathrm{Spin}_{2n}$, $H = \mathrm{SO}_{2n+1}$, $H = \mathrm{GL}_{n+m}$, avec le sous-groupe parabolique et les identifications évidentes.

2.15

D'ailleurs, nous l'avons dit plus haut, ces trois dernières situations, plus simples, se réduisent aux précédentes. Plus précisément, si π est une représentation lisse irréductible générique de $\mathrm{GL}_n(F)$ on a, en désignant par 1_F le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(F) = F^\times$:

$$\gamma(\pi, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi) = \gamma(\pi \boxtimes 1_F, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

pour toute représentation lisse irréductible générique π de $\mathrm{GL}_n(F)$. Il en est de même pour les facteurs L et ε , suivant 2.9, et ces résultats s'étendent au cas où π n'est pas nécessairement générique (2.9 remarque). On a des énoncés parfaitement analogues dans les autres cas ; par exemple, avec des notations évidentes,

$$\gamma(\pi, S^2 \rho_n, s, \psi) = \gamma(\pi \boxtimes 1_F, S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

$$\gamma(\pi \boxtimes \pi', \rho_n \boxtimes \rho_m, s, \psi) = \gamma(\pi \boxtimes \pi' \boxtimes 1_F, \rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1, s, \psi).$$

Dans le même ordre d'idée on prouve les identités

$$(*) \quad \gamma(\pi \boxtimes \pi \boxtimes \chi, \rho_n \boxtimes \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi) = \gamma_\Lambda \gamma_S$$

avec

$$\gamma_\Lambda = \gamma(\pi \boxtimes \chi, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et

$$\gamma_S = \gamma(\pi \boxtimes \chi, S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi),$$

ou encore

$$\begin{aligned} \gamma(\pi \boxtimes \pi' \boxtimes \chi, \rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1, s, \psi) &= \gamma((\pi \otimes (\chi \circ \det)) \boxtimes \pi', \rho_n \boxtimes \rho_m, s, \psi) \\ &= \gamma(\pi \boxtimes (\pi' \otimes (\chi \circ \det)), \rho_n \boxtimes \rho_m, s, \psi) \end{aligned}$$

$$\gamma((\pi \otimes (\lambda \circ \det)) \boxtimes \chi, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\pi \boxtimes \chi \lambda^2, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

$$\gamma((\pi \otimes (\lambda \circ \det)) \boxtimes \chi, S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\pi \boxtimes \chi \lambda^2, S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et les identités correspondantes pour les facteurs L et ε .

2.16

Bien entendu, toutes ces identités sont inspirées par des relations très simples entre les représentations des L -groupes. Par exemple l'identité (*) vient de la décomposition de $\rho_n \otimes \rho_n$ en $\Lambda^2 \rho_n \oplus S^2 \rho_n$. Prouver ces identités par voie globale est très facile : elles sont vraies quand les représentations en question ont un vecteur non nul fixé par un sous-groupe d'Iwahori, à cause précisément de la relation entre représentations des L -groupes qui leur donne naissance. Pour la même raison, leur version archimédienne est également vraie. Pour établir le cas général, on peut, grâce à 2.4, se ramener au cas de représentations supercuspidales, et en ce cas plonger comme dans ([27], § 5) la situation locale dans une situation globale où à toutes les places finies sauf une, on a un vecteur non nul fixé par un sous-groupe de Iwahori. L'identité découle alors des cas connus et de l'équation fonctionnelle globale 2.6, à condition que le caractère additif ψ de F puisse être composant local d'un caractère additif global ; mais le § 2.5 permet précisément de se ramener à ce cas. Nous n'en dirons pas plus, renvoyant à ([27], § 5), ou encore [14] pour des cas plus généraux ; voir également 3.3 ci-dessous.

2.17

Il nous reste seulement à préciser les relations d'inductivité de 2.4. Si pour $n = r + s$ on identifie $\mathrm{GL}_r(F) \times \mathrm{GL}_s(F)$ au sous-groupe diagonal par blocs $r \times r$ et $s \times s$ de $\mathrm{GL}_n(F)$, alors la restriction de $\Lambda^2 \rho_n$ au groupe dual $\mathrm{GL}_r(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_s(\mathbf{C})$ se décompose en

$$(\Lambda^2 \rho_r \boxtimes 1_s) \oplus (\rho_r \boxtimes \rho_s) \oplus (1_r \boxtimes \Lambda^2 \rho_s).$$

De même, la restriction de $S^2 \rho_n$ se décompose en

$$(S^2 \rho_r \boxtimes 1_s) \oplus (\rho_r \boxtimes \rho_s) \oplus (1_r \boxtimes S^2 \rho_s)$$

et celle de $\rho_n \boxtimes \rho_m$ en $(\rho_r \boxtimes \rho_m) \oplus (\rho_s \boxtimes \rho_m)$.

L'adjonction du facteur $\mathrm{GL}_1(F)$ produit l'effet évident (on a noté 1_i la représentation triviale de $\mathrm{GL}_i(\mathbf{C})$).

3 Du global au local

3.1

Dans ce chapitre et le suivant nous prouvons notre résultat principal pour $G = \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$, $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$; le cas où $r = S^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$ s'en déduit aussitôt par les identités de 2.13 (voir 3.4).

La méthode du paragraphe suivant est globale, et fournit un résultat très partiel que nous complétons ici. Nous traitons ce passage du global au local avant le cas global, d'une part parce que précisément les techniques y sont surtout locales, d'autre part et surtout parce que nombre de notations introduites ici

serviront au chapitre suivant. Nous espérons qu'il sera clair pour le lecteur que le raisonnement n'est pas circulaire.

Notons $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$ le groupe de Grothendieck des représentations de W_F , continues, semisimples, et de dimension finie. A toute représentation σ (continue, Φ -semisimple, de dimension finie) de W'_F , on peut associer la classe $[\sigma]$ dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$ de sa restriction à W_F ; le facteur $\gamma(\sigma, s, \psi)$ ne dépend que de $[\sigma]$; on se permet de le noter $\gamma([\sigma], s, \psi)$. Comme on a $\gamma(\sigma \oplus \sigma', s, \psi) = \gamma(\sigma, s, \psi) \gamma(\sigma', s, \psi)$ si σ et σ' sont deux représentations de W'_F , on obtient en fait par multiplicativité un unique homomorphisme de groupes

$$\tau \mapsto \gamma(\tau, s, \psi) \quad \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})^{\times}$$

qui prolonge l'application précédente, définie sur les classes $[\sigma]$ de représentations σ de W'_F .

Fixons un caractère χ de W_F . Si σ est une représentation de W'_F comme plus haut, le facteur $\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi)$ ne dépend que de σ , et comme on a

$$\Lambda^2(\sigma \oplus \sigma') \simeq (\Lambda^2 \sigma) \oplus (\sigma \otimes \sigma') \oplus (\Lambda^2 \sigma')$$

si σ et σ' sont des représentations de W'_F , on voit qu'il existe une unique application quadratique

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})^{\times}$$

dont l'application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire associée soit

$$(\tau, \tau') \mapsto \gamma(\tau \otimes \tau' \otimes \chi, s, \psi)$$

(obtenue par $\mathbf{Z}$ -bilinéarité à partir des classes de représentations de W_F cf. [11]), et qui prenne la valeur $\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi)$ en la classe $[\sigma]$ d'une représentation σ de W'_F ; il est naturel de noter cette application

$$\tau \mapsto \gamma(\Lambda^2 \tau \otimes \chi, s, \psi).$$

3.2

On procède de manière analogue pour les représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$. Si π est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, on peut lui associer son support supercuspidal $[\pi]$, vu comme un élément du $\mathbf{Z}$ -module libre $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F)$ de base $\coprod_{n \geq 1} \mathcal{A}_F^0(n)$, où $\mathcal{A}_F^0(n)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Fixons un caractère χ de W_F comme en 3.1, et notons $\tilde{\chi}$ le caractère correspondant de $F^{\times}$. Si π et π' sont des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathrm{GL}_{n'}(F)$ respectivement, il découle aussitôt de 2.4, que les facteurs

$$\gamma(\pi \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et

$$\gamma(\pi \boxtimes \pi' \boxtimes \tilde{\chi}, \rho_n \boxtimes \rho_m \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

ne dépendent que des supports supercuspidaux $[\pi]$ et $[\pi']$. On définit alors comme plus haut (cf. [10]) une application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F) \times \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F) &\rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})^\times \\ (\varphi, \varphi') &\mapsto \gamma(\varphi \boxtimes \varphi' \boxtimes \tilde{\chi}, s, \psi)\end{aligned}$$

et une (unique) application quadratique

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F) &\rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})^\times \\ \varphi &\mapsto \gamma(\varphi \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2, s, \psi)\end{aligned}$$

dont l'application bilinéaire associée soit la précédente, et qui vaille $\gamma(\pi \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$ sur le support supercuspidal $[\pi]$ de $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$.

3.3

Si pour chaque entier $n \geq 1$, $\mathcal{G}_F^0(n)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles de W_F , l'union disjointe $\mathcal{G}_F^0$ des $\mathcal{G}_F^0(n)$, $n \geq 1$, forme une base du $\mathbf{Z}$ -module $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$, et la correspondance de Langlands (voir loc. cit. et [8]) est donnée par un isomorphisme de $\mathbf{Z}$ -modules $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$ sur $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(F)$, qui envoie $\mathcal{G}_F^0(n)$ sur $\mathcal{A}_F^0(n)$ pour chaque entier $n \geq 1$, et qui vérifie, avec $\chi, \tilde{\chi}$ fixés comme plus haut,

$$\gamma(\sigma \otimes \sigma' \otimes \chi, s, \psi) = \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\sigma') \boxtimes \tilde{\chi}, s, \psi)$$

pour $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$.

Proposition. – Pour $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$ on a

$$\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi) \equiv \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2, s, \psi) \pmod{\mathbf{C}^\times}.$$

Plus précisément, il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$, pouvant dépendre de σ et χ mais non de ψ , tel qu'on ait

$$\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2, s, \psi).$$

Si ψ est fixé, les paragraphes 3.1 et 3.2 entraînent immédiatement qu'il suffit de prouver cette identité pour un ensemble de générateurs de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$. Si ψ est composante locale d'un caractère additif global, c'est précisément ce que fournit la méthode globale du chapitre suivant. Mais si le résultat est vrai pour un choix de ψ , il l'est pour tout choix de ψ , avec la même constante α . En effet, le caractère central $\omega_{\pi(\sigma)}$ de $\pi(\sigma)$ correspond au déterminant $\det \sigma$ de σ , et il suffit de rapprocher les deux formules de 2.6, en constatant que

$$\det(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi) = (\det \sigma)^{n-1} \chi^{n(n-1)/2}$$

et

$$\tilde{\delta}_r(a) = (a^{n-1}, a^{n(n-1)/2})$$

cf. 2.10, 2.11.

Dans la suite de ce chapitre, nous admettons la proposition 3.3, qui sera prouvée par voie globale au chapitre suivant.

3.4

Remarquons que grâce à la relation (*) de 2.13, on tire de (3.3) avec des notations analogues,

$$\gamma(S^2\sigma \otimes \chi, s, \psi) = \alpha^{-1} \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, S^2, s, \psi)$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$.

Nous allons prouver les identités

$$L(\Lambda^2\sigma \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \otimes \tilde{\chi}, \Lambda^2\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et

$$L(S^2\sigma \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, S^2\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

pour toute représentation σ de dimension n de W'_F , ce qui donne bien le théorème 1.5, grâce à la compatibilité de la correspondance de Langlands au passage aux contragrédientes: $\pi(\sigma)^\vee = \pi(\sigma^\vee)$.

Dans un premier temps, supposons χ unitaire et $\pi(\sigma)$ tempérée; cela signifie que σ est somme de représentations indécomposables $\tau \otimes \mathrm{Sp}_r$ où τ est une représentation irréductible unitaire de W_F et Sp_r la représentation spéciale de dimension r , correspondant à la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_r(F)$; par commodité nous dirons en ce cas que σ est *tempérée*. On a

$$L(\tau \otimes \mathrm{Sp}_r, s) = L\left(\tau, s + \frac{r-1}{2}\right);$$

comme τ est unitaire $L(\tau \otimes \mathrm{Sp}_r, s)$ n'a pas de pôle pour $\mathrm{Re}(s) > 0$; la contragrédiente de $\tau \otimes \mathrm{Sp}_r$ et $\tau^\vee \otimes \mathrm{Sp}_r$ et par suite $L((\tau \otimes \mathrm{Sp}_r)^\vee, 1-s)$ n'a pas de pôle pour $\mathrm{Re}(s) < 1$.

Les représentations $\Lambda^2\sigma \otimes \chi$ et $S^2\sigma \otimes \chi$ sont toutes deux tempérées. Par suite $L(\Lambda^2\sigma \otimes \chi, s)$ et $L(\Lambda^2\sigma^\vee \otimes \chi^{-1}, 1-s)$ n'ont pas de pôle en commun, et de même $L(S^2\sigma \otimes \chi, s)$ et $L(S^2\sigma^\vee \otimes \chi^{-1}, 1-s)$. Appliquant la proposition 3.3 et 2.4, on obtient l'égalité

$$\gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2\rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi) = \varepsilon(\Lambda^2\sigma \otimes \chi, s, \psi) \frac{L(\Lambda^2\sigma^\vee \otimes \chi^{-1}, 1-s)}{L(\Lambda^2\sigma \otimes \chi, s)}.$$

La définition en 2.11 des facteurs L implique qu'on a bien

$$L(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2\rho_n \boxtimes \rho_1, s) = L(\Lambda^2\sigma \otimes \chi, s),$$

et on prouve de même

$$L(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, S^2\rho_n \boxtimes \rho_1, s) = L(S^2\sigma \otimes \chi, s).$$

3.5

Par 2.6, tordre σ ou χ par un caractère non ramifié affecte les deux membres de l'égalité à prouver par le même décalage de la variable complexe s . Par suite, l'égalité voulue des fonctions L vaut pour $\pi(\sigma)$ essentiellement tempérée et χ un caractère quelconque de W_F .

Traitons le cas général, en notant $\tilde{\nu}$ le caractère $x \mapsto |x|_F$ de $F^\times$ et ν le caractère correspondant de W_F . La représentation σ s'écrit $\sigma_1 \nu^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \sigma_r \nu^{\alpha_r}$ où les σ_i sont tempérées et où les α_i sont des nombres réels vérifiant $\alpha_1 > \dots > \alpha_r$. Alors $\pi(\sigma)$ est, par construction de la correspondance de Langlands (cf. [12], [13] par exemple) le quotient de Langlands de l'induite parabolique de

$$\pi(\sigma_1) \otimes (\tilde{\nu}^{\alpha_1} \circ \det) \boxtimes \dots \boxtimes \pi(\sigma_r) \otimes (\tilde{\nu}^{\alpha_r} \circ \det).$$

Par définition $L(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi)$ est le produit des $L(\Lambda^2 \sigma_i \otimes \chi, s + 2\alpha_i)$ et de même $L(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s)$ est le produit des

$$L(\pi(\sigma_i) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_{r_i} \boxtimes \rho_1, s + 2\alpha_i) \quad \text{où} \quad r_i = \dim \sigma_i, i = 1, \dots, r.$$

On a donc bien l'égalité des facteurs L en 3.4, et le théorème 1.5 en découle.

Remarque. – Bien entendu, si l'on connaît l'égalité précise des facteurs $\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi)$ et $(\gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \psi))$, on en déduit comme précédemment l'égalité des facteurs L et des facteurs ε . Pour σ une représentation de W'_F qui est somme de caractères de W_F , l'égalité des facteurs γ est connue (cf. 2.5, remarque); on en déduit en particulier qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition des facteurs $L(\pi \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s)$ (et des facteurs ε) quand π et χ sont non ramifiés (cf. 2.11, remarques).

4 La méthode globale

4.1

Dans ce chapitre, nous prouvons la proposition 3.3 pour un ensemble de générateurs de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$; d'après 3.3 il suffit de le faire pour un caractère additif ψ fixé; nous le prendrons provenant d'une situation globale.

Soient k un corps de nombres, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et W_k le groupe de Weil de $\bar{k}$ sur k . Pour chaque place v de k , on dispose du groupe de Weil W_v du complété k_v et d'un homomorphisme continu injectif de W_v dans W_k , bien défini à automorphisme essentiellement intérieur près [30]. Si Σ est une représentation de W_k , Σ_v désigne sa restriction à W_v .

Si Σ est une représentation continue irréductible de W_k , de dimension n , et Π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$, on dit que Σ et Π se correspondent si Σ_v et Π_v se correspondent en presque toutes les places finies v de k où Σ_v et Π_v sont non ramifiées, ce qui peut s'exprimer par l'égalité $L(\Sigma_v, s) = L(\Pi_v, s)$ en ces places – on a noté, selon l'usage, $L(\Pi_v, s)$ au lieu de $L(\Pi_v, \rho_n, s)$.

Si Σ et Π se correspondent, alors $\Sigma^\vee$ et $\Pi^\vee$ se correspondent et si η est un caractère de W_k correspondant à un caractère $\tilde{\eta}$ de $\mathbf{A}_k^\times/k^\times$, alors $\Sigma \otimes \eta$ et $\Pi \otimes \tilde{\eta} \cdot \det$ (noté aussi $\Pi \tilde{\eta}$) se correspondent également.

Remarque. – On sait que si Π est automorphe cuspidale, ses composantes locales Π_v sont génériques. Si Π est en outre unitaire on espère (conjecture de Ramanujan-Petersson) qu'ils sont en fait tempérés. Dans nos situations, ce sera le cas [10].

4.2

Supposons donc que Σ et Π comme en 4.1 se correspondent, et fixons un ensemble fini S de places de k tel que pour v hors de S , v soit finie, Σ_v et Π_v non ramifiées, et

$$L(\Sigma_v, s) = L(\Pi_v, s).$$

Fixons aussi un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbf{A}_k/k$; on note Ψ_v la restriction de Ψ à k_v . Quitte à agrandir S , on supposera que $n(\Psi_v) = 0$ pour $v \notin S$. Pour $v \notin S$ on a alors

$$L(\Lambda^2 \Sigma_v, s) = L(\Pi_v, \Lambda^2 \rho_n, s)$$

$$\varepsilon(\Lambda^2 \Sigma_v, s, \Psi_v) = \varepsilon(\Pi_v, \Lambda^2 \rho_n, s, \psi_v) = 1$$

et plus généralement, si χ est un caractère de W_k non ramifié hors de S , et $\tilde{\chi}$ le caractère correspondant de $\mathbf{A}_k^\times/k^\times$, on a

$$L(\Lambda^2 \Sigma_v \otimes \chi_v, s) = L(\Pi_v \boxtimes \tilde{\chi}_v, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s)$$

$$\varepsilon(\Lambda^2 \Sigma_v \otimes \chi_v, s, \Psi_v) = \varepsilon(\Pi_v \boxtimes \tilde{\chi}_v, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v) = 1.$$

On veut écrire et comparer les équations fonctionnelles globales pour ces fonctions L . Notant L^S le produit sur les places hors de S de facteurs L , elles s'écrivent (cf. 2.10)

$$L^S(\Pi \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s) = \gamma_S L^S(\Pi^\vee \boxtimes \tilde{\chi}^{-1}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, 1-s)$$

avec

$$\gamma_S = \prod_{v \in S} \gamma(\Pi_v \boxtimes \tilde{\chi}_v, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v)$$

et parallèlement

$$L^S(\Lambda^2 \Sigma \otimes \chi, s) = \gamma'_S L^S(\Lambda^2 \Sigma^\vee \otimes \chi^{-1}, 1-s)$$

avec

$$\gamma'_S = \prod_{v \in S} \gamma(\Lambda^2 \Sigma_v \otimes \chi_v, s, \Psi_v).$$

De ce qui précède on déduit l'égalité $\gamma_S = \gamma'_S$.

4.3

On veut améliorer l'égalité précédente jusqu'à obtenir si possible l'égalité des facteurs γ en une place finie donnée w dans S .

Supposons que Σ_v et Π_v se correspondent pour toute place infinie de k – cela sera le cas pour les couples (Σ, Π) utilisés plus loin. On a alors ([27], Thm. 3.5) l'égalité

$$\gamma(\Lambda^2 \Sigma_v \otimes \chi_v, s, \Psi_v) = \gamma(\Pi_v \otimes \tilde{\chi}_v, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v)$$

pour toute place infinie v de k d'où, avec des notations évidentes

$$\gamma_{S-S_\infty} = \gamma'_{S-S_\infty}.$$

Pour aller un peu plus loin, il faut effectuer une torsion par un caractère suffisamment ramifié de W_k et plus précisément appliquer la méthode esquissée en 1.7–1.8. On isole une place finie w de k dans S , et on considère un caractère $\tilde{\eta}$ de $\mathbf{A}_k^\times/k^\times$, qu'on prendra trivial à l'infini et en w , et très ramifié, en un sens à préciser, en les places finies de S distinctes de w . Notant η le caractère de W_k correspondant à $\tilde{\eta}$, on applique les résultats précédents en remplaçant, suivant les recettes de 2.8–2.9, Σ par $\Sigma \otimes \eta^{n-1}$, Π par $\Pi \otimes (\tilde{\eta} \circ \det)^{n-1} = \Pi \tilde{\eta}^{n-1}$ et χ par $\chi \eta^{n(n-1)/2}$, $\tilde{\chi}$ par $\tilde{\chi} \tilde{\eta}^{n(n-1)/2}$.

Remarque. – Comme nous l'avons dit en 2.10, nous pourrions au prix d'un peu plus de travail, utiliser d'autres torsions, plus simples, par exemple en omettant de tordre χ .

Il est possible que η soit ramifié en certaines places v hors de S . Mais comme Π_v est une série principale, il en est de même de $\Pi_v \tilde{\eta}_v^{n-1}$ et il découle de 2.5 Remarque que

$$\gamma(\Lambda^2 \Sigma_v \otimes \eta_v^{n-1} \otimes \chi_v \otimes \eta_v^{n(n-1)/2}, s, \Psi_v)$$

est égal à

$$\gamma(\Pi_v \tilde{\eta}_v^{n-1} \boxtimes \tilde{\chi}_v \tilde{\eta}_v^{n(n-1)/2}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v).$$

Pour $v \in S - S_\infty$, $v \neq w$, on choisira η_v assez ramifié pour que les facteurs γ précédents soient des monômes en q_v^{-s} ce qui est possible par les résultats de [28] rappelés en 2.9. Si Σ_v et Π_v se correspondent en toute place infinie de k , on déduit comme précédemment que $\gamma(\Lambda^2 \Sigma_w \otimes \chi_w, s, \Psi_w)$ diffère de $\gamma(\Pi_w \boxtimes \tilde{\chi}_w, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_w)$ par un monôme du type αN^s , $\alpha \in \mathbf{C}^\times$, $N \in \mathbf{Q}^\times$.

On peut même obtenir ce résultat sans supposer que Σ_v et Π_v se correspondent à l'infini: il suffit de comparer ce qu'on obtient en tordant d'une part par un caractère $\tilde{\eta}$ trivial à l'infini et très ramifié en toute place finie de S , et d'autre part par un caractère trivial à l'infini et en w et très ramifié en toute place finie de S distincte de w .

4.4

Dans les circonstances globales qui nous intéressent Σ_w et Π_w se correspondent par la correspondance de Langlands, et ce qu'on vient d'obtenir implique immédiatement l'égalité

$$L(\Lambda^2 \Sigma_w \otimes \chi_w, s) = L(\pi(\Sigma_w) \boxtimes \pi(\chi_w), \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s),$$

en raisonnant comme en 3.4. Mais cela ne donne pas directement l'égalité, même à une constante près, des facteurs ε .

Bien sûr, si la conjecture de stabilité de 2.9 était prouvée, (pour la représentation $r = \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1$), on obtiendrait bien cette égalité de facteurs ε . Il suffit pour cela de remarquer que, comme Σ et Π se correspondent, $\det \Sigma$ et ω_Π , le caractère central de Π , se correspondent par la théorie du corps de classes, et il en est de même de leurs composantes locales à chaque place. En une place finie v de S où η_v est suffisamment ramifié, la conjecture de stabilité des facteurs γ implique l'égalité de

$$\gamma(\Lambda^2(\Sigma_v \otimes \eta_v^{n-1}) \otimes \chi_v \eta_v^{n(n-1)/2}, s, \Psi_v)$$

et de

$$\gamma(\Pi_v \otimes (\tilde{\eta}_v \circ \det)^{n-1} \boxtimes \tilde{\chi}_v \tilde{\eta}_v^{n(n-1)/2}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v),$$

et comme précédemment l'équation fonctionnelle donne la même égalité en la place w , où η_w est trivial; on suit alors 3.4.

4.5

En l'absence de preuve de la conjecture de stabilité, il faut procéder différemment pour obtenir le résultat de 3.3, plus faible qu'espéré.

Pour chaque place finie v de S , il existe une extension finie résoluble ℓ_v de k_v telle que la restriction à W_{ℓ_v} de Σ_v soit non ramifiée. Pour une telle place distincte de w , choisissons une suite d'extensions cycliques successives $k_v = k_v^{(0)} \subset k_v^{(1)} \subset \dots \subset k_v^{(r_v)} = \ell_v$, et notons ρ le plus grand des r_v . En 4.6, nous montrerons qu'il existe une suite d'extensions cycliques successives $k = k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset \dots \subset k^{(\rho)}$, totalement décomposées à l'infini et aux places au-dessus de w , et telle qu'en chaque place de $k^{(\rho)}$ au-dessus d'une place finie de S distincte de w , la restriction $\Sigma^{(\rho)}$ de Σ à $W_{k^{(\rho)}}$ soit non ramifiée.

Admettons cela, et notons $\Pi^{(\rho)}$ la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_{k^{(\rho)}})$ obtenue à partir de Π par changements de base successifs. Comme Σ and Π sont non ramifiées et se correspondent aux places finies hors de S , il en est de même de $\Sigma^{(\rho)}$ et $\Pi^{(\rho)}$. Comme Σ et Π se correspondent à l'infini et en w et que $k^{(\rho)}/k$ est totalement décomposée à l'infini et en w , $\Sigma^{(\rho)}$ et $\Pi^{(\rho)}$ se correspondent à l'infini et au-dessus de w . En fait $\Sigma^{(\rho)}$ et $\Pi^{(\rho)}$ se correspondent aussi en les places finies au-dessus de $S - \{w\}$. Cela peut se voir de diverses manières. Soit l'on utilise que la correspondance de Langlands locale est compatible aux changements de base [12], soit on remarque que par un argument parallèle à celui de 4.4, on obtient

$$L(\Sigma_v^{(\rho)}, s) = L(\Pi_v^{(\rho)}, s)$$

pour toute telle place v ; mais comme $\Sigma_v^{(\rho)}$ est non ramifiée, le facteur $L(\Sigma_v^{(\rho)}, s)^{-1}$ est un polynôme de degré n en q_v^{-s} , donc également le facteur $L(\Pi_v^{(\rho)}, s)^{-1}$, ce qui implique que $\Pi_v^{(\rho)}$ est non ramifiée, l'égalité des facteurs L donnant alors que $\Sigma_v^{(\rho)}$ et $\Pi_v^{(\rho)}$ se correspondent!

Par le raisonnement de 4.4, on voit que le produit sur les places v de $k^{(\rho)}$ au-dessus de w des facteurs

$$\gamma(\Lambda^2 \Sigma_v^{(\rho)} \otimes \chi_v^{(\rho)}, s, \Psi_v^{(\rho)})$$

est égal à celui des facteurs $\gamma(\Pi_v^{(\rho)} \boxtimes \tilde{\chi}_v^{(\rho)}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_v^{(\rho)})$, où l'on a noté $\chi^{(\rho)}$ le caractère de $W_{k^{(\rho)}}$ restriction de χ et $\Psi^{(\rho)}$ le caractère de $\mathbf{A}_{k^{(\rho)}}/k^{(\rho)}$ obtenu en composant Ψ avec la trace de $k^{(\rho)}$ à k . Mais l'extension $k^{(\rho)}$ de k est totalement décomposée à la place w : les facteurs précédents sont tous égaux respectivement à $\gamma(\Lambda^2 \Sigma_w \otimes \chi_w, s, \Psi_w)$ et à $\gamma(\Pi_w \boxtimes \tilde{\chi}_w, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_1, s, \Psi_w)$ et si d est le degré de $k^{(\rho)}$ sur k , ces derniers facteurs ont même puissance d -ème, donc différent d'une racine de l'unité.

4.6

L'existence de $k^{(\rho)}$ se prouve par récurrence sur ρ . Si $\rho = 0$ $k^{(\rho)} = k$ convient. Supposons $\rho \geq 1$. Choisissons un caractère d'ordre fini μ de $\mathbf{A}_k^\times/k^\times$ trivial à l'infini et en w et qui en toute place finie v de $S - \{w\}$ telle que $r_v \geq 1$ définisse l'extension cyclique $k_v^{(1)}/k_v$. Prenons pour $k^{(1)}$ l'extension cyclique de k définie par μ . Elle est bien décomposée à l'infini et en w , et si v est une place finie de $S - \{w\}$ telle que $r_v \geq 1$, le complété de $k^{(1)}$ en toute place v' au-dessus de v est isomorphe à $k_v^{(1)}$ et par un tel isomorphisme la restriction de Σ à $W_{k_v^{(1)}}$, correspond à la restriction de Σ_v à $k_v^{(1)}$. Notons $\Sigma^{(1)}$ la restriction de Σ à $W_{k^{(1)}}$; alors pour $\Sigma^{(1)}$ l'invariant ρ a diminué d'une unité, ce qui donne le résultat par récurrence.

4.7

Résumons ce qu'apporte la méthode globale qu'on vient de décrire. On se donne un élément σ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$. On suppose qu'il existe

- un corps de nombres k , une place w de k et un isomorphisme topologique φ de k_w sur F
- une paire (Σ, Π) sur k comme en 4.1 telle que Σ_v et Π_v se correspondent à l'infini, à presque toutes les places finies et en w , et telle que Σ_w se transporte via φ en une représentation de W_F isomorphe à σ .

Alors il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle que, pour tout caractère additif non trivial ψ de F et tout caractère χ de W_F , on ait

$$\gamma(\Lambda^2 \sigma \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, \Lambda^2 \rho_n \boxtimes \rho_s, s, \psi).$$

Mais précisément les résultats de [11, 12] montrent que l'on peut trouver tout cela pour un ensemble de générateurs du groupe de Grothendieck des représentations unitaires de W_F ; grâce à la torsion par les caractères non ramifiés on

obtient aussitôt le résultat pour un ensemble de générateurs de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(F)$ tout entier. Cela suffit à prouver la proposition 3.4 et donc le théorème 1.5.

5 Fonctions L d'Asai

5.1

Dans ce dernier chapitre, nous traitons les fonctions L à la Asai obtenues en considérant des groupes unitaires. Les principes de démonstration sont exactement les mêmes que dans les chapitres précédents. Une fois le cadre posé, nous serons donc plus brefs.

On fixe une extension quadratique K de F , de sorte que le groupe de Weil W_K apparait comme un sous-groupe ouvert d'indice 2 de W_F . On prend pour G le groupe $\text{Res}_{K/F}(\text{GL}_{n/K}) \times \text{GL}_{1/F}$, de sorte que $G = G(F)$ soit $\text{GL}_n(K) \times F^\times$. Le L -groupe de $R = \text{Res}_{K/F}(\text{GL}_{n/K})$ est le produit semi-direct de $\text{GL}_n(\mathbf{C})^2$ par W_K ; l'action de W_F se factorise par $\text{Gal}(K/F)$ et l'élément non trivial de $\text{Gal}(K/F)$ agit par permutation des deux facteurs $\text{GL}_n(\mathbf{C})$. On note $I(\rho_n)$ la représentation de ${}^L R$, de dimension n^2 , où un élément (A, B, g) du groupe $\text{GL}_n(\mathbf{C}) \times \text{GL}_n(\mathbf{C}) \times W_K$ agit comme $A \otimes B$ sur $\mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^n$, et un élément g de $W_F - W_K$ agit par $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ pour $x, y \in \mathbf{C}^n$. On s'intéresse à la représentation $r = I(\rho_n) \boxtimes \rho_1$ de ${}^L G = {}^L R \times \mathbf{C}^\times$. Une représentation lisse irréductible de $G = \text{GL}_n(K) \times F^\times$ est un produit tensoriel $\pi \boxtimes \chi$ où π est une représentation lisse irréductible de $\text{GL}_n(K)$ et χ un caractère de $F^\times$. Si π est générique, la méthode de Shahidi permet de définir des facteurs $\gamma(\pi \boxtimes \chi, I(\rho_n) \boxtimes \rho_1, s, \psi)$ et de même des facteurs L et ε . Comme en 2.5, on étend ces définitions au cas où π n'est pas forcément générique. (Nous expliquons ci-dessous en 5.3 le groupe $\mathbf{H}$ qui donne naissance à la représentation $I(\rho_n) \boxtimes \rho_1$.)

5.2

Si σ est une représentation (continue, Φ semisimple) de W'_K de dimension n , on peut lui associer un homomorphisme admissible $t_\sigma : W'_K \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C}) \times W_K$, bien défini à conjugaison près. Comme le L -groupe ${}^L R$ est induit à partir du L -groupe $\text{GL}_n(\mathbf{C}) \times W_K$, cela revient à se donner un homomorphisme admissible $\varphi_\sigma : W'_F \rightarrow {}^L R$, à équivalence près [2]. Concrètement, choisissons un élément g_0 de $W_F - W_K$; on peut poser alors, pour $g \in W_K$,

$$\varphi_\sigma(g) = (t_\sigma(g), t_\sigma(g_0 g g_0^{-1}), g)$$

et

$$\varphi_\sigma(g g_0) = (t_\sigma(g), t_\sigma(g_0 g g_0), g g_0).$$

La représentation $I(\rho_n) \circ \varphi_\sigma$ de W'_F est isomorphe à la représentation $I(\sigma)$ obtenue à partir de σ par induction tensorielle de W'_K à W'_F .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème. – Soient σ une représentation de dimension n du groupe de Weil-Deligne de K , χ un caractère de W_F , $\tilde{\chi}$ le caractère correspondant de $F^\times$. Alors on a

$$L(I(\sigma) \otimes \chi, s) = L(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_n) \boxtimes \rho_1, s)$$

et il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle que l'on ait

$$\varepsilon(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \varepsilon(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_n) \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

pour tout caractère additif non trivial ψ de F .

5.3

Bien sûr l'étape essentielle, comme dans les chapitres précédents, consiste à prouver l'existence d'une racine de l'unité α telle qu'on ait

$$\gamma(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_n) \boxtimes \rho_1, s, \psi).$$

Il convient d'abord d'indiquer comment ces facteurs γ sont définis, autrement dit quel groupe $\mathbf{H}$, comme en 2.3, leur donne naissance.

On considère l'espace $W = K^{2n}$ muni de la forme hermitienne

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{2n} \bar{x}_i x'_{2n-i},$$

où $a \mapsto \bar{a}$ désigne l'automorphisme non trivial de K/F . On note $\mathbf{H}$ le groupe des similitudes de l'espace hermitien W . Si, pour tout entier $r \geq 1$, on note w_r la matrice antidiagonale $w_r = (\delta_{i, r+1-i})$, alors $H = \mathbf{H}(F)$ est formé des matrices A de $M_{2n}(K)$ qui vérifient ${}^t \bar{A} w_{2n} A = \lambda w_{2n}$ pour un scalaire $\lambda = \lambda(A) \in F^\times$.

Le sous-espace V de W formé des vecteurs dont les n dernières coordonnées sont nulles est un sous-espace totalement isotrope maximal. Son stabilisateur dans H est un sous-groupe parabolique P de H et l'application

$$(A, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & w_n {}^t \bar{A}^{-1} w_n \end{pmatrix}$$

identifie $\mathrm{GL}_n(K) \times F^\times = G$ au sous-groupe de Levi diagonal par blocs de P .

Le L -groupe de $\mathbf{H}$ est le produit semi-direct de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbf{C})$ par W_F , où W_F agit à travers $\mathrm{Gal}(K/F)$, l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(K/F)$ agissant par $(A, \lambda) \mapsto (w_{2n} \lambda {}^t \bar{A}^{-1} w_{2n}, \lambda)$.

Le plongement de ${}^L G$ (décrit en 5.1) dans ${}^L H$ ainsi obtenu est donné par

$$(A, B, g, \lambda) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & w_n {}^t \bar{B}^{-1} w_n \end{pmatrix}, \lambda, g \right)$$

si $g \in W_K$ et

$$(A, B, g, \lambda) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \lambda B & 0 \\ 0 & w_n {}^t \bar{A}^{-1} w_n \end{pmatrix}, -\lambda, g \right)$$

si $g \in W_F - W_K$.

La représentation de ${}^L G$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ du radical unipotent de ${}^L P$ est donnée ainsi : si on identifie $\mathfrak{n}$ à l'espace des matrices $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C \in M_n(\mathbf{C})$ alors l'élément (A, B, g, λ) de ${}^L G$ agit par $C \mapsto \lambda A C w_n {}^t B w_n$ si $g \in W_K$ et

$$C \mapsto \lambda B w_n {}^t C {}^t A w_n \quad \text{si } g \in W_F - W_K.$$

Elle est bien équivalente à $I(\rho_n) \boxtimes \rho_1$.

5.4

Il convient de donner les propriétés d'inductivité des facteurs γ . En termes de représentations σ_1 et σ_2 de W'_K , elles s'expriment par la relation

$$I(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \simeq I(\sigma_1) \oplus I(\sigma_2) \oplus \text{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2)$$

où $\bar{\sigma}_2$ est le conjugué de σ_2 par l'action de $\text{Gal}(K/F)$ et Ind_K^F désigne l'induction de W'_K à W'_F .

Ainsi, si χ est un caractère de W_F , on obtient

$$\gamma(I(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \otimes \chi, s, \psi) = \gamma(I(\sigma_1) \otimes \chi, s, \psi) \gamma(I(\sigma_2) \otimes \chi, s, \psi) \gamma'$$

avec $\gamma' = \gamma(\text{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2) \otimes \chi, s, \psi)$.

Remarque. – Rappelons que les facteurs γ de représentations de W'_F ne dépendent que de la restriction au groupe de Weil W_F ; de plus les facteurs L sont inductifs, les facteurs ε inductifs en degré 0. On déduit donc l'égalité, si σ_1 est de dimension n_1 , σ_2 de dimension n_2 ,

$$\frac{\gamma(\text{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2) \otimes \chi, s, \psi)}{\gamma(\text{Ind}_K^F(1_K) \otimes \chi, s, \psi)^{n_1 n_2}} = \frac{\gamma(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2 \otimes \chi_K, s, \psi_K)}{\gamma(\chi_K, s, \psi_K)^{n_1 n_2}}$$

où $\chi_K = \chi|_{W_K}$, $\psi_K = \psi \circ \text{tr}_{K/F}$; bien sûr l'induite à W_F du caractère trivial 1_K de W_K est isomorphe à $1_F \oplus \omega_{K/F}$ où $\omega_{K/F}$ est le caractère d'ordre 2 de W_F trivial sur W_K .

5.5

Procédons de manière parallèle du côté de GL_n . Soient n_1 et n_2 deux entiers ≥ 1 tels que $n_1 + n_2 = n$, et identifions le F -groupe réductif $M = \text{GL}_{n_1}(K) \times \text{GL}_{n_2}(K)$ au sous-groupe diagonal par blocs $n_1 \times n_1$ puis $n_2 \times n_2$ – en descendant la diagonale – de $R = \text{GL}_n(K)$. Alors le groupe ${}^L M$ de M , produit semi-direct de W_F par deux copies de $\text{GL}_{n_1}(\mathbf{C}) \times \text{GL}_{n_2}(\mathbf{C})$, est un sous-groupe de ${}^L R$ et la restriction de $I(\rho_n)$ à ${}^L M$ est somme de 3 représentations irréductibles. Il est facile de s'en convaincre, et d'identifier ces représentations, en utilisant les formules de la fin de 5.2. Décomposant les matrices C de $M_n(\mathbf{C})$

en matrices par blocs $\begin{pmatrix} C_{12} & C_{11} \\ C_{22} & C_{21} \end{pmatrix}$ où C_{ij} est de taille $n_i \times n_j$, on voit que les sous-espaces formés des matrices $\begin{pmatrix} 0 & C_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{22} & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} C_{12} & 0 \\ 0 & C_{21} \end{pmatrix}$ sont stables; sur le premier espace la représentation de ${}^L M$ provient de la représentation $I(\rho_{n_1})$ du quotient $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{C})^2 \rtimes W_K$, sur le second elle provient de $I(\rho_{n_2})$ et sur le troisième elle est induite à partir du sous-groupe d'indice 2 $(\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbf{C}))^2 \times W_K$ qui laisse stable l'espace des matrices $\begin{pmatrix} C_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et y agit par la formule suivante: pour $A_1, B_1 \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{C})$, $A_2, B_2 \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbf{C})$, $g \in W_K$ l'élément (A_1, A_2, B_1, B_2, g) agit par

$$C_{12} \mapsto A_1 C_{12} w_{n_2} {}^t B_2 w_{n_2}.$$

Notons $\bar{i}(n_1, n_2)$ cette dernière représentation. Si π_1, π_2 sont des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_{n_1}(K)$ et $\mathrm{GL}_{n_2}(K)$ respectivement, et $\tilde{\chi}$ un caractère de $F^\times$, on obtient donc la formule d'inductivité suivante, pour tout sous-quotient π de l'induite parabolique, de M à G , de $\pi_1 \boxtimes \pi_2$,

$$\begin{aligned} \gamma(\pi \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_n) \boxtimes \rho_1, s, \psi) &= \gamma(\pi_1 \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_{n_1}) \boxtimes \rho_1, s, \psi) \times \\ &\gamma(\pi_2 \boxtimes \tilde{\chi}, I(\rho_{n_2}) \boxtimes \rho_1, s, \psi) \gamma(\pi_1 \boxtimes \pi_2 \boxtimes \tilde{\chi}, \bar{i}(n_1, n_2) \boxtimes \rho_1, s, \psi). \end{aligned}$$

Notons aussi que, par des considérations analogues mais plus simples, les formules d'inductivité pour $\gamma(\pi_1 \boxtimes \pi_2 \boxtimes \tilde{\chi}, \bar{i}(n_1, n_2) \boxtimes \rho_1, s, \psi)$ disent que ces facteurs sont multiplicatifs en π_1 et en π_2 .

5.6

Du côté galoisien, le facteur $\gamma(\mathrm{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2) \otimes \chi, s, \psi)$ est bimultiplicatif en σ_1 et σ_2 , de sorte qu'on obtient une application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K) \times \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \gamma(\mathrm{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \bar{\sigma}_2) \otimes \chi, s, \psi)$$

et une application quadratique $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})$

$$\sigma \mapsto \gamma(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi)$$

dont l'application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire associée est la précédente.

Parallèlement, on obtient aussi avec des notations évidentes une application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K) \times \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})$$

$$(\pi_1, \pi_2) \mapsto \gamma(\pi_1 \boxtimes \pi_2 \boxtimes \chi, \bar{i} \boxtimes \rho_1, s, \psi)$$

et une application quadratique $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(K) \rightarrow \mathbf{C}(q^{-s})$

$$\pi \mapsto \gamma(\pi \boxtimes \chi, I \otimes \rho_1, s, \psi)$$

dont elle est l'application $\mathbf{Z}$ -bilinéaire associée.

Théorème. – 1) Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$, on a pour tout caractère χ de $F^\times$ et tout caractère additif non trivial ψ de F ,

$$\gamma(\text{Ind}_K^F(\sigma_1 \otimes \tilde{\sigma}_2) \otimes \chi, s, \psi) = \gamma(\pi(\sigma_1) \boxtimes \pi(\sigma_2) \boxtimes \pi(\chi), \tilde{i} \boxtimes \rho_1, s, \psi).$$

2) Pour $\sigma \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$ et χ un caractère de $F^\times$, il existe une racine de l'unité α dans $\mathbf{C}$ telle que pour tout caractère additif non trivial ψ de F , on ait

$$\gamma(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \alpha \gamma(\pi(\sigma) \boxtimes \pi(\chi), I \boxtimes \rho_1, s, \psi).$$

Pour en déduire le théorème 5.2, il suffit de suivre le raisonnement de 3.5 en remarquant que si σ est tempérée, $I(\sigma)$ l'est aussi.

5.7

La partie 1) du théorème 5.5 peut se démontrer de deux façons. La première consiste à établir une formule parallèle à celle de la remarque de 5.3. Si $\pi_1 \in \mathcal{A}_F(n_1)$, $\pi_2 \in \mathcal{A}_F(n_2)$, $\chi \in \mathcal{A}_F(1)$

$$\frac{\gamma(\pi_1 \boxtimes \pi_2 \boxtimes \chi, \tilde{i}(n_1, n_2) \boxtimes \rho_1, s, \psi)}{\gamma(\text{Ind}_K^F(1_K) \otimes \chi, s, \psi)^{n_1 n_2}} = \frac{\gamma(\pi_1 \boxtimes \tilde{\pi}_2 \boxtimes \chi_K \rho_{n_1} \boxtimes \rho_{n_2} \boxtimes \rho_1, s, \psi_K)}{\gamma(\chi_K, s, \psi_K)^{n_1 n_2}}$$

où $\chi_K = \chi \circ N_{K/F}$.

Cette formule peut s'établir par la méthode globale de Shahidi: on plonge la situation locale dans une situation locale où, à toutes les places sauf celle considérée, la formule est vraie par la définition même des facteurs γ ([27], Thm. 3.5) et on en déduit la formule à la place considérée par l'équation fonctionnelle globale.

La partie 1) du théorème 5.5 découle alors de la préservation des facteurs γ par la correspondance de Langlands sur K .

5.8

Nous préférons utiliser une méthode, toujours globale, analogue à celle du chapitre 4, qui donne également la partie 2) du théorème 5.5.

On remarque d'abord qu'il suffit de prouver ce théorème pour un caractère additif non trivial ψ fixé, qu'on prendra provenant d'une situation globale: cela découle des formules de changement de caractère additif données en 3.5.

Ensuite on remarque qu'il suffit de prouver le théorème quand σ_1, σ_2 et σ parcourent un ensemble de générateurs de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(K)$. Et cela peut se faire par la méthode du chapitre 4. Il suffit de prendre soin, au départ, de choisir une extension quadratique de corps de nombres k/f qui en une place finie redonne l'extension locale fixée K/F . La méthode de [12] consiste à partir de k totalement réel et à relever les extensions galoisiennes finies L/K en des extensions

galoisiennes finies ℓ/k de corps totalement réels ayant même groupe de Galois que L/K . Ici il suffit de partir d'un corps totalement réel f dont un complété est F et de relever les extensions galoisiennes finies L de F contenant K en des extensions galoisiennes finies ℓ de f de corps totalement réels – on note alors k l'extension quadratique de f correspondant à K . On effectue alors les constructions de [12] et les arguments de [11, 12] s'appliquent, comme au chapitre 4.

□

Références

- [1] M. ASGARI, Local L -functions for split spinor group, *Canad. J. Math.* **54** (2002), 673-693.
- [2] A. BOREL, Automorphic L -functions, in Automorphic forms, representations and L -functions, *PSPM* **33**, AMS (1979) Part II, 27-61.
- [3] P. CARTIER, Representations of p -adic groups: a survey, in Automorphic forms, representations and L -functions, *PSPM* **33**, AMS (1979) Part I, 111-156.
- [4] J. COGDILL & I. PIATETSKI-SHAPIRO, Stability of gamma factors for $SO(2n+1)$, *Manuscripta Math.* **95** (1998), 437-461.
- [5] P. DELIGNE, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L , in Modular functions of one variable II, *L. N. in Math.* **349** (1973), 501-597.
- [6] P. DELIGNE & G. HENNIART, Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L , *Invent. Math.* **64** (1981), 89-116.
- [7] M. HARRIS, The local Langlands conjecture for $GL(n)$ over a p -adic field, $n < p$, *Invent. Math.* **134** (1998), 177-210.
- [8] M. HARRIS & R. TAYLOR, On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, *Ann. of Math. Studies* **151**, P.U.P. (2002).
- [9] G. HENNIART, Caractérisation de la correspondance de Langlands par les facteurs ε de paires, *Invent. Math.* **113** (1993), 339-350.
- [10] G. HENNIART, Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique, *Invent. Math.* **139** (2000), 439-456.
- [11] G. HENNIART, Relèvement global d'extensions locales, quelques problèmes de plongement, *Math. Ann.* **319** (2001), 1141-1173.
- [12] G. HENNIART, Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n , in Journées arithmétiques de Rome 1999, *J.T.N. Bordeaux* **13** (2001), 167-188.
- [13] G. HENNIART, Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour GL_n , *Bull. Soc. Math. France* **130** (2002), 587-602.
- [14] G. HENNIART, Sur les facteurs γ de Shahidi, *en préparation*.
- [15] H. JACQUET, I. PIATETSKI-SHAPIRO & J. SHALIKA, Rankin-Selberg convolutions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 367-464.
- [16] H. JACQUET & J. SHALIKA, A lemma on highly ramified ε -factors, *Math. Ann.* **271** (1985), 319-332.
- [17] D. JIANG & D. SOUDRY, Local converse theorem for $SO(2n+1)$ and applications, à paraître aux *Ann. of Math.*
- [18] D. JIANG & D. SOUDRY, Generic representations and local Langlands reciprocity law for p -adic $SO(2n+1)$, à paraître dans un volume en l'honneur de J. Shalika.
- [19] H. KIM, Applications of Langlands' functorial lift of odd orthogonal groups, *Trans. A.M.S.* **354** (2002), 2775-2796.

- [20] H. KIM & F. SHAHIDI, Cuspidality of symmetric spaces with applications, *Duke Math. J.* **112** (2002), 177-197.
- [21] R.P. LANGLANDS, In the classification of irreducible representations of real algebraic groups, *in* Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, *Math. Surveys Mon.* **31**, AMS (1989), 101-170.
- [22] D. RAMAKRISHNAN, Modularity of solvable Artin representations of $GO(4)$ -type, *IMRN* **1** (2002), 1-54.
- [23] F. RODIER, Whittaker models for admissible representation of reductive p -adic split groups, *in* Harmonic analysis on homogeneous spaces, *PSPM* **26**, AMS (1973), 425-430.
- [24] F. SHAHIDI, On certain L -functions, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 297-355.
- [25] F. SHAHIDI, Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $GL(n)$, *Amer. J. Math.* **106** (1989), 67-111.
- [26] F. SHAHIDI, Local coefficients as Artin factor for real groups, *Duke Math. J.* **52** (1985), 973-1007.
- [27] F. SHAHIDI, A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures, complementary series for p -adic groups, *Ann. of Math.* **132** (1990), 273-330.
- [28] F. SHAHIDI, Twists of a general class of L -functions by highly ramified characters, *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), 380-384.
- [29] F. SHAHIDI, Local coefficients as Mellin transforms of Bessel functions: towards a general stability, *IMRN* **39** (2002), 2075-2119.
- [30] J. TATE, Number theoretic background, *in* Automorphic forms, representations and L -functions, *PSPM* **33**, AMS (1979), Part 2, 3-26.