Scanned with permission from the publisher:

Un metodo generale per il calcolo delle matrici di trasferimento di un canale magnetico per particelle cariche costituito da quadrupoli e magneti analizzatori / Uccelli, Fabio; Sacerdoti, G

Published in: Nuovo Cimento: 26 (1962) pp.238-250

From: Carmen Vasini <vasini@sif.it>

To: Jens Vigen <Jens.Vigen@cern.ch>

Subject: Re: Request for permission to reproduce published material

Dear Jens Vigen,

we are glad to grant you permission to reproduce the material requested provided full credit is given to the source.

Kindest regards.

Carmen Vasini

CERN LIBRARIES, GENEVA

CM-P00048656

Un metodo generale per il calcolo delle matrici di trasferimento di un canale magnetico per particelle cariche costituito da quadrupoli e magneti analizzatori.

G. SACERDOTI e F. UCCELLI

Istituto di Elettrotecnica dell'Università - Roma
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Pisa

(ricevuto il 14 Maggio 1962)

Riassunto. — In questo articolo si espone un nuovo procedimento per la valutazione delle matrici di trasferimento di canali magnetici costituiti da quadrupoli e magneti analizzatori. Questo procedimento porta ad uno sviluppo in serie dei coefficienti matriciali in genere rapidamente convergente.

Introduzione.

Come è consuetudine, in molte esperienze di fisica nucleare, si definisce un fascio di particelle di alta energia in ampiezza, in apertura angolare, in banda di momenti accettata, mediante canali costituiti da quadrupoli magnetici ⁽¹⁻²⁾ e magneti analizzatori ⁽³⁻⁴⁾, che chiameremo genericamente « elementi » del canale ⁽⁵⁻⁷⁾.

In questi elementi, si distinguono piani verticali e piani orizzontali.

⁽¹⁾ P. GRIVET e A. SEPTIER: *Les lentilles quadrupolaires magnetiques*, CERN 58/25.

⁽²⁾ R. M. STERNHEIMER: *Strong Focusing Magnets* (New York, 1960).

⁽³⁾ K. G. STEFFEN: *Magnetsektor mit konstantem Feldgradienten*, DESY-Notiz. A. 2.37 (1958).

⁽⁴⁾ B. DE RAAD, B. LANGESETH e G. PLUYM: *Magnetic measurements on the bending magnets of the beam transport system of the CERN P.S.*, PS/Int. EA 60-14.

⁽⁵⁾ O. CHAMBERLAIN: *Ann. Rev. Nucl. Phys.*, **10**, 161 (1960).

⁽⁶⁾ D. LUCKEY: *Beam Optics* (New York, 1961).

⁽⁷⁾ S. VAN DER MEER: *Acromatic beam optics for particle separator*, CERN 60/22.

Normalmente i vari elementi sono raggruppati in modo tale che i moti delle particelle, rispettivamente sul piano verticale e sul piano orizzontale, sono disaccoppiati. Di conseguenza, una particella che inizialmente si muova sul piano mediano orizzontale esce dal sistema ancora sul piano medesimo.

Ciò che è esposto nell'articolo si riferisce appunto a questi canali, che perciò non contengono nè solenoidi ⁽⁸⁾ nè quadrupoli elicoidali ⁽⁹⁻¹⁰⁾.

Come è noto, nell'approssimazione di Gauss ⁽¹¹⁻¹²⁾, si possono ricavare le posizioni $x(s)$, $y(s)$ e le deviazioni angolari $x' = dx(s)/ds$; $y' = dy(s)/ds$ di una particella rispetto alla traiettoria principale, dalle relazioni

$$\begin{vmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{TH}(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{TV}(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{vmatrix};$$

Nel caso in cui l'elemento di canale sia sottile, le matrici assumono l'aspetto

$$(1) \quad \begin{vmatrix} M(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta s \\ n(s) \Delta s & 1 \end{vmatrix}$$

ove $n(s)$ ha, nel caso dei quadrupoli la seguente espressione:

$$n(s) = \frac{3 \cdot 10^{-4} dB y(s)/dx}{p} \text{ (cm}^{-2}\text{)}, \quad \text{con } \begin{cases} dB y/dx & \text{in G/cm} \\ p & \text{in MeV/c} \end{cases}$$

e nel caso degli analizzatori:

$$n(s) = \left[1 - \frac{dB}{dR} \frac{R_0}{B_0} \right] \frac{1}{R_0^2}, \quad (\text{per il piano orizzontale})$$

$$n(s) = \left[\frac{dB}{dR} \frac{R_0}{B_0} \right] \frac{1}{R_0^2} \quad (\text{per il piano verticale}).$$

In Appendice I riportiamo alcune considerazioni generali che derivano dall'esame del gruppo di trasformazioni continue individuate dalla (1).

In generale, la matrice complessiva di trasferimento di un sistema ottico, si ottiene dal prodotto delle matrici dei singoli tratti. Questo calcolo è particolarmente laborioso nel caso in cui gli elementi del canale siano assai numerosi.

⁽⁸⁾ D. N. EDWARDS e B. ROSE: *Nuclear Instr. and Methods*, **7**, 135 (1960).

⁽⁹⁾ G. SACERDOTI: *L'Elettrotecnica*, **57**, no. 5 (1960).

⁽¹⁰⁾ G. SACERDOTI e F. UCCELLI: *Alcuni studi sul quadrupolo elicoidale*. Nota int. no. 122, LFN 62/18 (1962).

⁽¹¹⁾ P. G. SONA: *Ottica degli analizzatori magnetici*, LNF 58/11 (1958).

⁽¹²⁾ F. KRIENEN, R. A. SALMERON e J. STEINBERGER: CERN PS/Int. EA 60/10.

In questa nota proponiamo un metodo che permette di calcolare, nell'approssimazione desiderata, i coefficienti della matrice di trasferimento mediante sviluppo in serie, nota $n(s)$ in ogni punto del canale. Negli esempi numerici si può vedere come lo sviluppo in serie sia in generale rapidamente convergente.

1. - Espressione ordinata del prodotto di un numero finito di matrici del tipo (1).

Il prodotto di k matrici del tipo (1) può essere scritto nella seguente maniera:

$$(2) \quad |M| = \begin{vmatrix} 1 & \Delta s_k \\ n_k & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & \Delta s_2 \\ n_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \Delta s_1 \\ n_1 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^k [1 + |N_i| \Delta s_i],$$

ove è

$$|1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad |N_k| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ n_k & 0 \end{vmatrix}.$$

Nel fare il prodotto (2), possiamo raggruppare i k termini secondo questo ordine:

a) termine in cui non compare alcun fattore N_k ; questo termine risulterà dal prodotto delle matrici unitarie e sarà pari a

$$M_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

b) termini in cui compare un sol fattore N_i . Questi termini saranno in numero di k e saranno dati da:

$$M_1 = \sum_{i=1}^k |N_i| \Delta s_i$$

c) termini in cui compaiono i fattori $N_i N_j$ ($i \neq j$). Saranno $(k \cdot (k-1))/2$ termini, che potremo esprimere in tal modo:

$$\begin{aligned} M_2 &= |N_k| \Delta s_k \sum_{i=1}^{k-1} |N_i| \Delta s_i + |N_{k-1}| \Delta s_{k-1} \sum_{i=1}^{k-2} |N_i| \Delta s_i + |N_2| \Delta s_2 |N_1| \Delta s_1 = \\ &= \sum_{j=1}^k |N_j| \Delta s_j \sum_{i=1}^{j-1} |N_i| \Delta s_i, \end{aligned}$$

e così via.

Quindi, la (2) può ancora esprimersi secondo la formula seguente:

$$(3) \quad |M| = |1| + \sum_{i=1}^k |N_i| \Delta s_i + \sum_{j=1}^k |N_j| \Delta s_j \sum_{i=1}^{j-1} |N_i| \Delta s_i + \\ + \sum_{l=1}^k |N_l| \Delta s_l \sum_{j=1}^{l-1} |N_j| \Delta s_j \sum_{i=1}^{j-1} |N_i| \Delta s_i + \dots$$

2. – Espressione generale nel caso di infinite matrici.

La formula (3) è particolarmente idonea ad esprimere il valore della matrice $|M|$ qualora $\Delta s \rightarrow 0$; infatti, come è facile verificare, le sommatorie si trasformano in integrali e la (2) può essere scritta

$$(4) \quad |M| = |1| + \int_{s_e}^{s_u} N_i ds_i + \int_{s_e}^{s_u} N_2 ds_2 \int_{s_e}^{s_2} N_1 ds_1 + \int_{s_e}^{s_u} N_3 ds_3 \int_{s_e}^{s_3} N_2 ds_2 \int_{s_e}^{s_2} N_1 ds_1 + \dots,$$

s_e = coordinata di entrata;

s_u = coordinata di uscita.

3. – Calcolo degli elementi di matrice.

La formula (4) ci permette di ottenere le espressioni esplicite dei coefficienti m_{ij} della matrice $|M|$.

Potremo scrivere

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} m_{ij}^{(k)},$$

ove $m_{ij}^{(k)}$ è l'elemento ij -esimo della matrice $|M_k|$. Avremo, come facilmente si può controllare,

$$\text{per } k=0: m_{11}^{(0)} = 1; \quad m_{12}^{(0)} = 0; \quad m_{21}^{(0)} = 0; \quad m_{22}^{(0)} = 1;$$

$$\text{per } k=1: m_{11}^{(1)} = 0; \quad m_{12}^{(1)} = \int_{s_e}^{s_u} ds_1; \quad m_{21}^{(1)} = \int_{s_e}^{s_u} u_1 ds_1; \quad m_{22}^{(1)} = 0;$$

$$\text{per } k=2: m_{11}^{(2)} = \int_{s_e}^{s_u} ds_2 \int_{s_e}^{s_2} u_1 ds_1; \quad m_{12}^{(2)} = 0; \quad m_{21}^{(2)} = 0; \quad m_{22}^{(2)} = \int_{s_e}^{s_u} u_2 ds_2 \int_{s_e}^{s_2} ds_1;$$

$$\text{per } k=3: m_{11}^{(3)} = 0; \quad m_{12}^{(3)} = \int_{s_e}^{s_u} ds_3 \int_{s_e}^{s_3} u_2 ds_2 \int_{s_e}^{s_2} ds_1; \quad m_{21}^{(3)} = \int_{s_e}^{s_u} u_3 ds_3 \int_{s_e}^{s_3} ds_2 \int_{s_e}^{s_2} u_1 ds_1; \quad m_{22}^{(3)} = 0$$

Senza proseguire nel calcolo possiamo già da questi primi termini ricavare

le formule generali:

$$m_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} \int [s, n]^k,$$

$$m_{12} = \sum_{k=0}^{\infty} \int [u, s]^k,$$

$$m_{21} = \sum_{k=0}^{\infty} \int [s, u]^k,$$

$$m_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \int [u, s]^k,$$

ove i simboli hanno il seguente significato:

$$\begin{aligned} \int s [u, s]^k &= \int_{s_e}^{s_u} ds_{2k} \int_{s_e}^{s_k} u_{2k-1} ds_{2k-1} \dots \int_{s_e}^{s_3} ds_2 \int_{s_e}^{s_2} u_1 ds_1 \int_{s_e}^{s_1} ds_0; \\ \int [u, s]^k &= \int_{s_e}^{s_v} u_{2k-1} ds_{2k-1} \int_{s_e}^{s_{2k-1}} ds_{2k-2} \dots \int_{s_e}^{s_2} u_1 ds_1 \int_{s_e}^{s_1} ds_0; \end{aligned}$$

per $k=0$ poniamo che sia

$$\int_{s_e}^{s_u} (u, s)^k = \int_{s_e}^{s_u} (s, u)^k = 1.$$

In Appendice II sono riportati i coefficienti calcolati per $n = \text{cost}$ e $n = a + bx$, ($0 < x < l$), l lunghezza del canale magnetico.

4. - Foccheggiamento di un sistema ottico costituito di quadrupoli.

In un sistema di quadrupoli è particolarmente semplice verificare le condizioni necessarie al doppio foccheggiamento mediante l'esame delle tracce (o « spur ») delle matrici di trasferimento per le oscillazioni orizzontali e per le verticali.

Nel nostro caso dovrà essere

$$(5) \quad -1 < A + B < 1,$$

$$(6) \quad -1 < A - B < 1,$$

ove

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \int s[u, s]^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \int u[s, u]^{2k+1},$$

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \int s[u, s]^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \int u[s, u]^{2k}.$$

Queste relazioni seguono dal fatto che nelle matrici complessive l'indice n che caratterizza le oscillazioni orizzontali è uguale ma di segno contrario all'indice n caratteristico delle oscillazioni verticali.

Le due relazioni (5), (6) sono soddisfatte se vale la condizione:

$$|A| + |B| < 1.$$

Questa relazione deve essere necessariamente soddisfatta per realizzare le condizioni di doppio foccheggio per un canale di quadrupoli.

5. – Valutazione dell'approssimazione dei risultati.

Per valutare l'approssimazione raggiunta, nel calcolo dei coefficienti, si può procedere in due modi:

a) calcolando il valore del determinante della matrice ottenuta; tale valore dovrebbe essere 1, per cui la grandezza

$$\varepsilon = D - 1$$

può servire di criterio per la misura della precisione raggiunta;

b) se arrestiamo lo sviluppo dei coefficienti al k -esimo termine, possiamo valutare per eccesso la somma dei termini trascurati ponendo in questi ultimi $n = |n_{\max}|$ (massimo valore che assume tra s_e e s_u).

Come è facile verificare si ottengono le seguenti espressioni degli errori ε_{ij} da cui sono affetti i vari coefficienti:

$$\varepsilon_{11} < \exp[ul] - \sum_{i=0}^k \frac{u^i l^i}{i!},$$

$$\varepsilon_{22} < \exp[ul] - \sum_{i=0}^k \frac{u^i l^i}{i!},$$

$$\varepsilon_{21} < u \left[\exp[ul] - \sum_{i=0}^k \frac{u^i l^i}{i!} \right],$$

$$\varepsilon_{12} < \frac{1}{u} \left[\exp[ul] - \sum_{i=0}^k \frac{u^i l^i}{i!} \right].$$

6. — Calcolo delle matrici caratteristiche di una lente magnetica con $n(s)$ ad andamento trapezoidale.

Normalmente, nel calcolo delle matrici di trasferimento di un quadrupolo si usa, al posto dell'effettivo spessore della lente, introdurre la « lunghezza efficace », definita come

$$l_{\text{eff}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (dB_y/dx)_r ds}{(dB_y/dx)_0},$$

e si sostituisce alla lente reale una lente fittizia di lunghezza pari a l_{eff} e di gradiente costante pari al valore valutato sull'asse.

Questa schematizzazione, denominata « modello rettangolare » conduce a valori dei coefficienti matriciali che si discostano notevolmente da quelli che si ricavano sperimentalmente.

Abbiamo verificato in un esempio come, introducendo il « modello trapezoidale » ⁽¹³⁾ e arrestando lo sviluppo in serie al secondo termine, vengono ricavati valori dei coefficienti che non si discostano più del 3 % dai valori sperimentali.

I calcoli eseguiti con questa schematizzazione, sono resi possibili appunto dal metodo proposto in questo articolo ⁽¹⁴⁾.

Il quadrupolo oggetto delle nostre verifiche ha le seguenti caratteristiche:

$$l_0 = 22 \text{ cm} \quad (\text{spessore della lente}),$$

$$r = 10 \text{ cm} \quad (\text{raggio del cerchio di gola}).$$

Fig. 1.

⁽¹³⁾ F. UCCELLI: *Calcolo delle matrici di transfert di un quadrupolo col modello trapezoidale*, LNF 62 (1962).

⁽¹⁴⁾ G. SACERDOTI: *Sviluppo in serie degli elementi di matrice di un sistema ottico*, LNF 62/26 (1962).

Si può rilevare sperimentalmente (con misure magnetiche) che l'andamento del gradiente (e quindi di $n(s)$) è rappresentato con buona approssimazione dal grafico di Fig. 1.

Applicheremo la teoria esposta nei precedenti paragrafi e valuteremo la matrice di trasferimento tra il piano di entrata (di coordinata 0) e il piano di uscita (di coordinata 55 cm). Ciò perchè i coefficienti sperimentali in nostro possesso ⁽¹⁵⁾ si riferiscono appunto a tali condizioni.

Fig. 2.

⁽¹⁵⁾ E. BRAUNERSREUTHER, V. CHABAUD, C. DELORME e M. MORPURGO: *Lentilles quadrupolaires magnetiques constituant le dispositif du faisceau de mesons μ du CERN*, CERN 61/12 (1961).

La matrice di trasferimento (relativa al piano defocalizzante), espressa in funzione di n_0 , risulta a calcoli fatti

$$M_{\text{defoc}} = \begin{vmatrix} 1 + 8.8 \cdot 10^2 u_0 + 10^5 u_0^2 + \dots & 55 + 1.8 \cdot 10^4 u_0 + 2 \cdot 10^6 u_0^2 + \dots \\ 32 u_0 + 7 \cdot 10^3 u_0^2 + \dots & 1 + 8.8 \cdot 10^2 u_0 + 10 u_0^2 + \dots \end{vmatrix}$$

In Appendice II sono riportate le matrici caratteristiche dei tratti in cui $n(s)$ varia linearmente e del tratto in cui si mantiene costante. In Fig. 2 è possibile inoltre constatare di quanto si discostano effettivamente i coefficienti valutati col modello trapezoidale da quelli sperimentali.

7. - Conclusioni.

Il metodo esposto si rivela particolarmente utile per il calcolo di sistemi ottici complessi, ove si debba tener conto della variabilità di $n(s)$ lungo il cammino ottico.

La facilità con cui è possibile ricavare i coefficienti delle matrici di trasferimento e soprattutto la possibilità di ottenere elevate (e qualsivoglia) approssimazioni, ne consigliano l'adozione, in special modo quando nel sistema ottico siano presenti lenti sottili.

È in corso di elaborazione, da parte dell'ing. UCCELLI (INFN, Sezione di Pisa), un completo programma per il calcolo di canali magnetici con la calcolatrice del CSCE di Pisa, basato appunto su tale metodo.

APPENDICE I

La trasformazione

$$M = \begin{vmatrix} 1 & n_1 \Delta s \\ u_2 \Delta s & 1 \end{vmatrix},$$

è l'elemento generatore di un gruppo di trasformazioni continue.

Può essere interessante vedere se il gruppo

$$M^* = \begin{vmatrix} 1 - g \Delta s & 0 \\ 0 & 1 + g \Delta s \end{vmatrix},$$

che, come il gruppo M è a modulo unitario, è identico ad M o se ne è completamente indipendente.

Evidentemente, dato un certo valore di g , non si può trovare un valore di n per cui M è equivalente ad M^* .

Possiamo però dimostrare che si può trovare una successione di u_{i1}, u_{i2}

per cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N \begin{vmatrix} 1 & n_{i1} \Delta s_i \\ u_{i2} \Delta s_i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 + g_j \Delta s_j & 0 \\ 0 & 1 - g_j \Delta s_j \end{vmatrix}$$

o, in altre parole, si può verificare che esiste una successione ordinata di elementi del gruppo M^* che tende asintoticamente all'elemento caratteristico del gruppo M^* :

$$\begin{vmatrix} e^L & 0 \\ 0 & e^L \end{vmatrix}$$

Quindi l'elemento caratteristico del gruppo M^* può considerarsi come il limite di un insieme di elementi del gruppo M opportunamente ordinati, cioè un « punto di accumulazione ». La molteplicità di M è maggiore di quella di M^* a causa del maggior numero di parametri arbitrari (tre al posto di uno).

Consideriamo un andamento di n_1 come indicato in Fig. 3.

La matrice M tra (0) ed $(s_0 + s_1)$ è data da

$$\begin{vmatrix} \cos s_0 & \sin s_0 \\ -\sin s_0 & \cos s_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ G_0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos s_1 & \sin s_1 \\ -\sin s_1 & \cos s_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

ove $n_{2m} \Delta s = G_0$.

Da essa si ricava

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(s_0 + s_1) + G_0 \sin s_0 \cos s_1, & a_{12} &= \sin(s_0 + s_1) + G_0 \sin s_0 \sin s_1, \\ a_{21} &= -\sin(s_0 + s_1) + G_0 \cos s_0 \cos s_1, & a_{22} &= \cos(s_0 + s_1) + G_0 \sin s_0 \cos s_1, \end{aligned}$$

e ponendo

$$s_0 + s_1 = 2\pi + \varepsilon, \quad s_0 = \pi/4, \quad s_1 = \frac{7}{4}\pi + \varepsilon, \quad G_0 = \varepsilon,$$

si ha infine

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \varepsilon/2 + \varepsilon^2, & a_{12} &= \varepsilon^2, \\ a_{21} &= \varepsilon^2, & a_{22} &= 1 - \varepsilon/2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Si ottiene così in prima approssimazione una matrice del gruppo M^+ .

Se ripetiamo n volte il procedimento, si ottiene, sempre in prima approssimazione:

$$M_\mu = \begin{vmatrix} \exp[1 + u(\varepsilon/2)] & 0 \\ 0 & \exp[1 - u(\varepsilon/2)] \end{vmatrix},$$

(e ciò è vero tanto più grande è n , purchè sia $n\varepsilon = \text{cost}$).

Fig. 3.

APPENDICE II

a) *Calcolo dei coefficienti matriciali per $n = n_0 = \text{cost.}$*

Dalle (4), ponendo

$$\begin{aligned} n(s) &= n_0, \\ s_e &= 0, \\ s_u - s_e &= l_0, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} M_{11} &= 1 + \frac{n_0 l_0^2}{2!} + \frac{n_0^3 l_0^4}{4!} + \frac{n_0^3 l_0^6}{6!} + \dots, \\ M_{12} &= l_0 + \frac{n_0 l_0^3}{3!} + \frac{n_0^2 l_0^5}{5!} + \frac{n_0^3 l_0^7}{7!} + \dots, \\ M_{21} &= n_0 l_0 + \frac{n_0^2 l_0^3}{3!} + \frac{n_0^3 l_0^5}{5!} + \frac{n_0^4 l_0^7}{7!} + \dots, \\ M_{22} &= 1 + \frac{n_0 l_0}{2!} + \frac{n_0^2 l_0^4}{4!} + \frac{n_0^3 l_0^6}{6!} + \dots. \end{aligned}$$

b) *Calcolo dei coefficienti matriciali per $n(s) = a + bs$, $0 \leq s \leq 1$.*

Sempre dalle (4), ponendo

$$n(s) = h + ks,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} M_{11} &= 1 + \frac{hr^2}{2!} + \frac{kr^3}{3!} + \frac{h^2 r^4}{4!} + \frac{4hkr^5}{5!} + \frac{4k^2 r^6}{6!} + \dots, \\ M_{12} &= r + \frac{hr^3}{3!} + \frac{2}{4!} kr^2 + \frac{h^2 r^5}{5!} + \frac{6}{6!} hkr^6 + \frac{10}{7!} k^2 r^7 + \dots, \\ M_{21} &= hr + \frac{kr^2}{2!} + \frac{h^2 r^3}{3!} + \frac{4}{4!} hkr^2 + \frac{4}{5!} k^2 r^5 + \dots, \\ M_{22} &= 1 + \frac{hr^2}{2!} + \frac{2}{3!} kr^3 + \frac{h^2 r^4}{4!} + \frac{6}{5!} hkr^5 + \frac{10}{6!} k^2 r^6 + \dots. \end{aligned}$$

Riportiamo la tabella riassuntiva dei primi termini dello sviluppo in serie della matrice M di trasferimento di un sistema di lenti quadrupolari lungo $L=1$ aventi

$$n = a + bs, \quad M = \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{6},$$

$$A_2 = \frac{a^2}{4!} + 4 \frac{ab}{5!} + \frac{4}{6!} b^2,$$

$$A_3 = \frac{a^3}{6!} + 9 \frac{a^2b}{7!} + 28 \frac{ab^2}{8!} + 28 \frac{b^3}{9!},$$

$$A_4 = \frac{a^4}{8!} + 16 \frac{a^3b}{9!} + 100 \frac{a^2b^2}{10!} + \frac{280}{11!} ab^3 + 280 \frac{b^4}{12!},$$

$$A_5 = \frac{a^5}{10!} + 25 \frac{a^4b}{11!} + 260 \frac{a^3b^2}{12!} + 1380 \frac{a^2b^3}{13!} + 3640 \frac{ab^4}{14!} + 3640 \frac{b^5}{15!},$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}, \quad B_2 = \frac{a^2}{4!} + \frac{6ab}{5!} + 10 \frac{b^2}{6!},$$

$$B_3 = \frac{a^3}{6!} + \frac{12a^2b}{7!} + 52 \frac{ab^2}{8!} + 80 \frac{b^3}{9!},$$

$$B_4 = \frac{a^4}{8!} + 20 \frac{a^3b}{9!} + 160 \frac{a^2b^2}{10!} + 320 \frac{ab^3}{11!} + 880 \frac{b^4}{12!},$$

$$B_5 = \frac{a^5}{10!} + 30 \frac{a^4b}{11!} + 369 \frac{a^3b^2}{12!} + 2412 \frac{a^2b^3}{13!} + 7680 \frac{ab^4}{14!} + 12320 \frac{b^5}{15!},$$

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{a}{3!} + \frac{2b}{4!}, \quad C_2 = \frac{a^2}{5!} + \frac{6ab}{6!} + \frac{10b^2}{7!},$$

$$C_3 = \frac{a^3}{7!} + \frac{12a^2b}{8!} + ab^2 \frac{52}{9!} + \frac{80b^3}{10!},$$

$$C_4 = \frac{a^4}{9!} + \frac{a^3b}{10!} 20 + 160 \frac{a^2b^2}{11!} + \frac{320}{12!} ab^3 + \frac{b^4}{13!} 880,$$

$$C_5 = \frac{a^5}{11!} + \frac{a^4b}{12!} 30 + \frac{a^3b^2}{13!} 369 + \frac{a^2b^3}{14!} 2412 + \frac{ab^4}{15!} 7680 + \frac{b^5}{16!} 12320,$$

$$D_0 = 0, \quad D_1 = a + \frac{b}{2}, \quad D_2 = \frac{a^2}{3!} + \frac{4ab}{4!} + \frac{4b^2}{5!}.$$

$$D_3 = \frac{a^3}{5!} + \frac{9a^2b}{6!} + 28 \frac{ab^2}{7!} + \frac{28b^3}{8!}.$$

$$D_4 = \frac{a^4}{7!} + \frac{a^3b}{8!} 16 + 100 \frac{a^2b^2}{9!} + 280 \frac{ab^3}{10!} + 280 \frac{b^4}{11!},$$

$$D_5 = \frac{a^5}{9!} + \frac{a^4b}{10!} 25 + 260 \frac{a^3b^2}{11!} + 1380 \frac{a^2b^3}{12!} + \frac{ab^4}{13!} 3640 + \frac{b^5}{14!} 3640.$$

c) *Modello trapezoidale: matrici caratteristiche* (vedi Fig. 1).

— Tratto ($0 \div 6.5$) cm:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 6.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

— Tratto ($6.5 \div 16.5$) cm:

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 + 16.6n_0 + 55n_0^2 + \dots & 10 + 83.3n_0 + 198n_0^2 + \dots \\ 5n_0 + 33.3n_0^2 + \dots & 1 + 33.3n_0 + 138.8n_0^2 + \dots \end{vmatrix}.$$

— Tratto ($16.5 \div 38.5$) cm:

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 1 + 242n_0 + 9.7 \cdot 10^3 n_0^2 + \dots & 22 + 1.7 \cdot 10^3 n_0 + 4.3 \cdot 10^4 n_0^4 \dots \\ 22n_0 + 1.7 \cdot 10^3 n_0 + \dots & 1 + 242n_0 + 9.7 \cdot 10^3 n_0^2 + \dots \end{vmatrix}.$$

— Tratto ($38.5 \div 48.5$) cm:

$$|M_4| = \begin{vmatrix} 1 + 33.3n_0 + 138.8n_0 + \dots & 10 + 83.3n_0 + 198n_0^2 + \dots \\ 5n_0 + 33.3n_0^2 + \dots & 1 + 16.6n_0 + 55n_0^2 + \dots \end{vmatrix}.$$

— Tratto ($48.5 \div 55$) cm:

$$|M_5| = \begin{vmatrix} 1 & 6.5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

La matrice complessiva defocalizzante è data da

$$M_{\text{def}} = |M_5| \cdot |M_4| \cdot |M_3| \cdot |M_2| \cdot |M_1|,$$

ed è riportata nel testo.

SUMMARY

A new proceeding for evaluating the transfer matrix for magnetic channel for charged particles is exposed. The channel has to be obtained by quadrupole lenses and analyser magnets. The elements of the transfer matrix result expressed by a series expansion quickly converging.