Extension du théorème de Cameron-Martin aux translations aléatoires II. Intégrabilité des densités.

X. Fernique

Université Louis Pasteur

Rédaction du 2 Mars 2002

1 Introduction, Notations

On note G un vecteur gaussien à valeurs dans un espace de Fréchet localement convexe séparable E ; on note γ la loi de G et $(H, \|\cdot\|_H)$ l'espace auto-reproduisant associé à γ . Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans E ; on se propose d'évaluer la continuité absolue de la loi μ de X relativement à γ .

Dans un travail précédent ([3]), on a montré que si μ est absolument continue relativement à γ , alors il existe nécessairement deux vecteurs aléatoires G' de loi γ et Z à valeurs dans H tels que $X' = G' + Z$ ait aussi la loi μ . On compare maintenant la γ -intégrabilité de la densité $D = d\mu/d\gamma$ et l'intégrabilité de la v.a. $\|Z\|_H$.

On notera que la variable aléatoire Z est loin d'être unique : elle peut être construite à partir de différentes contraintes et a alors des propriétés d'intégrabilité différentes ; on préférera parler d'intégrabilité éventuelle.

2 L'intégrabilité éventuelle de $\|Z\|_H$

Théorème 1

On suppose que μ est absolument continue relativement à γ et que la densité $D = d\mu/d\gamma$ appartient à $L_p(\gamma)$, $p \in]1, \infty]$. Dans ces conditions et pour tout $a \in]0, \sqrt{(p-1)/(4p-2)}[$, il existe deux vecteurs aléatoires G' de loi γ et X' de loi μ tels que $Z = G' - X'$ prenne ses valeurs dans H et que

$$\mathbf{E} \{ \exp[a^2 \|Z\|_H^2] - 1 \} \leq \|D\|_{L_p} \times C(a, p). \quad (2.1)$$

La démonstration du théorème utilisera, comme dans [3], les inégalités isopérimétriques gaussiennes et le théorème de Kantorovitch-Rubinstein, mais sous une forme différente.

2.1 Le lemme fondamental

Lemme 1

On suppose que H est de dimension finie et donc que $\gamma(H) = \mu(H) = 1$. On fixe un nombre $a \in]0, \sqrt{(p-1)/(4p-2)}[$. On note $F(a)$ l'ensemble des couples (f_1, f_2) de fonctions mesurables bornées sur H telles que

$$\forall (x, y) \in H, f_1(x) + f_2(y) \leq \exp(a^2 \|x - y\|_H^2) - 1 \quad (2.2)$$

Pour tout $(f_1, f_2) \in F(a)$, on a alors :

$$\int f_1 d\gamma + \int f_2 d\mu \leq \|D\|_{L_p} \times C(a, p), \quad (2.3)$$

$$\text{où } C(a, p) = (1 - 2a^2 q)^{-1/2q} \times \left[1 + \frac{(1 - 2a^2 q)}{1 - 2a^2(1 + q)} \right] \text{ et } q = \frac{p}{p-1}. \quad (2.4)$$

Démonstration On fixe un couple (f_1, f_2) de $F(a)$. On fixe aussi deux nombres α et t tels que

$$\gamma\{f_1 \geq t\} = \Phi(\alpha) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\alpha} \exp[-u^2/2] du ;$$

alors les inégalités isopérimétriques ([2],[4]) indiquent qu'au sens de la distance dans H ,

$$\forall h \geq 0, \gamma[V_h\{f_1 \geq t\}] \geq \Phi(\alpha + h);$$

or si y appartient à $V_h\{f_1 \geq t\}$, alors il existe un élément x de H tel que

$$d_H(x, y) \leq h, f_1(x) \geq t ;$$

La définition de $F(a)$ implique alors que

$$f_2(y) \leq \exp[a^2 h^2] - 1 - t.$$

On en déduit que pour tout $s > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma\{y : f_2(y) + t > s\} &\leq 1 - \Phi(\alpha + \sqrt{1/a^2 \log(1+s)}) \\ &\leq (1/\sqrt{2\pi}) \int_{\alpha + \sqrt{1/a^2 \log(1+s)}}^{\infty} \exp[-u^2/2] du. \end{aligned}$$

Une intégration relativement à γ fournit donc

$$\begin{aligned} \int [(f_2(y) + t)^+]^q d\gamma(y) &\leq \int_{\alpha}^{\infty} [\exp[a^2(u - \alpha)^2] - 1]^q \exp[-u^2/2] du / \sqrt{2\pi} \\ &\leq \int_{\alpha}^{\infty} \exp[a^2 q(u - \alpha)^2 - u^2/2] du / \sqrt{2\pi} = J(a, \alpha, q) \end{aligned}$$

et en utilisant l'hypothèse d'intégrabilité de la densité D

$$\int [f_2(y) + t]^+ d\mu(y) \leq \|D\|_{L_p} \times J(a, \alpha, q)^{1/q}. \quad (2.5)$$

La majoration (2.5) est efficace du fait que a^2q est inférieur à $1/2$. On utilisera deux fois cette majoration (2.5), une première fois en substituant à t la valeur τ d'une γ -médiane de f_1 :

$$\begin{aligned} \int [f_2(y) + \tau]^+ d\mu(y) &\leq \|D\|_{L_p} \times J(a, 0, q)^{1/q} \\ &\leq \|D\|_{L_p} \times (1 - 2a^2q)^{-1/2q}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

et une seconde fois pour tout $t = f_1(x) \geq \tau$; α est alors négatif ou nul; en intégrant relativement à $d\gamma(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int \int [f_2(y) + f_1(x)]^+ d\mu(y) d\gamma(x) &\leq \|D\|_{L_p} \times [(1 - 2a^2q)^{-1/2q} + J'], \\ J' &= \int_{f_1(x) \geq \tau} \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} \exp[a^2q(u - \alpha)^2 - u^2/2] \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \right\}^{1/q} d\gamma(x). \end{aligned}$$

Pour réduire la forme quadratique, on opère le changement de variables : $v = u(1 - 2a^2q)^{1/2} + 2a^2q\alpha(1 - 2a^2q)^{-1/2}$ qui fournit :

$$\begin{aligned} J' &\leq \int_{f_1(x) \geq \tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-u^2/2] du}{\sqrt{1 - 2a^2q}\sqrt{2\pi}} \right\}^{1/q} \exp\left[\frac{a^2\alpha^2}{1 - 2a^2q}\right] d\gamma(x), \\ \alpha &= \alpha(x) = \Phi^{-1} \circ \gamma\{f_1 \geq f_1(x)\} \leq 0, \end{aligned}$$

de sorte que dans le domaine d'intégration,

$$\begin{aligned} \gamma\{f_1 \geq f_1(x)\} &\leq \exp[-\alpha^2/2], \\ \text{et donc } J' &\leq (1 - 2a^2q)^{-1/2q} \int \frac{1}{[\gamma\{f_1 \geq f_1(x)\}]^{\frac{2a^2}{1 - 2a^2q}}} d\gamma(x) \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale se majore indépendamment de la γ -loi de f_1 . On obtient finalement puisque $1 - 2a^2(1 + q)$ est positif :

$$\begin{aligned} \int f_1 d\gamma + \int f_2 d\mu &\leq \iint [f_2(y) + f_1(x)]^+ d\mu(y) d\gamma(x) \\ &\leq \|D\|_{L_p} \times (1 - 2a^2q)^{-1/2q} \times \left[1 + \frac{(1 - 2a^2q)}{1 - 2a^2(1 + q)}\right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

c'est le résultat annoncé.

Remarque : La démonstration du lemme présente successivement des majorations en (2.6) et (2.7); la première qui suppose $2a^2q < 1$ est réaliste, mais elle ne semble pas suffisante pour conclure; la seconde qui exige $2a^2(1 + q) < 1$ est moins satisfaisante (cf. exemple 3.2 ci-dessous).

2.2 Démonstration du théorème

Nous opérons en deux étapes.

2.2.1

Dans la première étape, nous supposons que H est de dimension finie et donc que $\gamma(H) = \mu(H) = 1$; dans ces conditions une forme du théorème de Kantorovich-Rubinstein adaptée à la fonction de coût c définie par $c(x, y) = \exp[a^2 d_H^2(x, y)] - 1, x, y \in H$ ([5], théorème 2.3.1) fournit immédiatement le résultat à partir du lemme 1 ci-dessus.

2.2.2

Pour conclure dans la situation générale, on utilise le même procédé d'approximation que dans la preuve du théorème 1 de la rédaction [3] : Nous notons G et X des vecteurs aléatoires de lois respectives γ et μ ; nous notons aussi θ l'application canonique ([2], 2.1) de H sur l'adhérence du dual E' de E dans $\mathbf{L}^2(\gamma)$ et nous choisissons une base orthonormale $(h_n, n \in \mathbb{N})$ de H de sorte que son image par θ soit contenue dans E' ; pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous notons F_N l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, F_N(x) = \sum_{n=1}^N \langle x, \theta h_n \rangle h_n,$$

et nous posons :

$$G_N = F_N(G) = \sum_{n=1}^N \langle G, \theta h_n \rangle h_n,$$

$$X_N = F_N(X) = \sum_{n=1}^N \langle X, \theta h_n \rangle h_n.$$

Nous notons H_N le sous-espace de H engendré par $(h_n, n \leq N)$. Alors G_N et X_N sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $H_N \subset E$; G_N est Gaussien et prend ses valeurs dans H_N qui est son espace auto-reproduisant; G_N et X_N sont les images de G et X par la même application F_N de sorte que la loi de X_N est absolument continue par rapport à celle de G_N et sa densité, obtenue par conditionnement appartient à L_p ; on peut donc leur appliquer les conclusions de la première étape et construire deux vecteurs aléatoires G'_N de même loi que G_N et X'_N de même loi que X_N tels que

$$\mathbf{E} \{ \exp[a^2 \|Z_n\|_H^2] - 1 \} \leq \|D\|_{L_p} \times C(a, p).$$

Remarquons maintenant que la suite $\{G_N, N \in \mathbb{N}\}$ converge p.s. vers G dans E , cette propriété s'écrit en fonction de la loi γ de G :

$$\gamma \{ x \in E : \sum_n \langle x, \theta h_n \rangle h_n \text{ converge vers } x \} = 1,$$

l'absolue continuité de μ relativement à γ implique alors que :

$$\mu\{x \in E : \sum_n \langle x, \theta h_n \rangle h_n \text{ converge vers } x\} = 1;$$

ceci signifie que la suite $\{X_N, N \in \mathbb{N}\}$ converge p.s. vers X et dans ces conditions, l'isonomie implique que les suites $\{G'_N, N \in \mathbb{N}\}$ et $\{X'_N, N \in \mathbb{N}\}$ convergent en loi dans E ; la suite double $\{(G'_N, X'_N), N \in \mathbb{N}\}$ est alors tendue dans E et on peut en extraire une suite partielle convergeant en loi qu'on peut même réaliser de sorte qu'elle converge p.s. dans E vers une limite (G', X') ; G' a la même loi que G , X' a la même loi que X ; le lemme de Fatou assure que

$$\mathbf{E} \{ \exp[a^2 \|Z\|_H^2] - 1 \} \leq \|D\|_{L_p} \times C(a, p).$$

La preuve est complète.

3 Des propriétés réciproques.

Dans ce paragraphe, on suppose que X est de la forme $X = G + Y$ où Y est indépendant de G et qu'il a même loi μ que $G + Z$ où Z est à valeurs dans H . On sait alors ([3], théorème 2) que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, la loi μ_λ de $X_\lambda = G + \lambda Y$ est absolument continue relativement à γ ; on note D_λ sa densité. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $\mathbf{E} \exp[\alpha \|Z\|^2] = C$ soit fini et on étudie l'intégrabilité de D_λ .

Théorème 2

Pour tout $\lambda \in]0, 1[$, D_λ appartient à $\mathbf{L}_p(\gamma)$ pour tout $p \leq 1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha(1-\lambda^2)}{\lambda^2}}$.
En particulier, D_λ appartient à $\mathbf{L}_2(\gamma)$ pour tout $\lambda \in [0, \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}]$.

3.1 Démonstration du théorème

La démonstration du théorème utilisera une variante du lemme 1 de [3] :

3.1.1

Pour tout nombre $\lambda \in [0, 1]$ et toute fonction f mesurable et bornée sur E , on note $M_\lambda f$ la fonction définie sur E par

$$\forall z \in E, \quad M_\lambda f(z) = \int f[\lambda(G + z) + \sqrt{1 - \lambda^2} g'] d\gamma(g') \quad (3.1)$$

Lemme 2

(a) On suppose que z appartient à l'espace autoreproduisant H de G ; dans ces

conditions et pour tout $p > 1$, on a :

$$|M_\lambda f(z)| \leq \left[\int |f(\lambda G + \sqrt{1-\lambda^2} g')|^q d\gamma(g') \right]^{1/q} \times \exp \left[\frac{(p-1)\lambda^2 \|z\|^2}{2(1-\lambda^2)} \right], \quad q = \frac{p}{p-1}. \quad (3.2)$$

(b) Soit de plus Z un vecteur aléatoire à valeurs dans H ; on suppose que $\mathbf{E} \exp[\alpha \|Z\|^2] = C$ est fini. Pour tout p tel que $\frac{p(p-1)\lambda^2}{2(1-\lambda^2)} \leq \alpha$, on a alors

$$\mathbf{E}|M_\lambda f(Z)| \leq C^{1/p} [\mathbf{E}|f(G)|^q]^{1/q}. \quad (3.3)$$

(c) Soit Y un vecteur aléatoire à valeurs dans E indépendant de G . On suppose que $G + Y$ a même loi que $G + Z$; dans ces conditions et pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $M_\lambda f(Y)$ a même loi que $M_\lambda f(Z)$.

De plus pour toute fonction f mesurable et bornée sur E , on a :

$$\mathbf{E}f(G + \lambda Y) = \mathbf{E}M_\lambda f(Y). \quad (3.4)$$

Démonstration : Les propriétés (a) et (c) ont été démontrées dans [3]. Pour démontrer (b), on utilise la propriété 3.2 et l'inégalité de Hölder qui fournissent :

$$\mathbf{E}|M_\lambda f(Z)| \leq \mathbf{E}|f(G)|^q]^{1/q} \times \left[\mathbf{E} \exp \left\{ \frac{p(p-1)\lambda^2 \|Z\|^2}{2(1-\lambda^2)} \right\} \right]^{1/p},$$

d'où la conclusion (b).

3.1.2

Pour démontrer le théorème, on utilise les conclusions (b) et (c) du lemme : elles impliquent que sous les hypothèses du théorème, pour tout $\lambda \in [0, 1[$ et toute fonction mesurable et bornée f sur E , on a :

$$\int f D_\lambda d\gamma \leq C^{1/p} \left[\int |f|^q d\gamma \right]^{1/q} \text{ pourvu que } \frac{p(p-1)\lambda^2}{2(1-\lambda^2)} \leq \alpha,$$

et cette inégalité suffit pour conclure.

3.2 L'efficacité des évaluations.

Un exemple : Supposons que Y soit indépendant de G , que $X = G + Y$ ait une loi μ absolument continue relativement à la loi γ de G et que la densité D soit de carré intégrable.

Dans ces conditions, le théorème 1 construit deux vecteurs aléatoires G' de loi γ et X' de loi μ tels que $Z = G' - X'$ prenne ses valeurs dans H et que

$$\mathbf{E} \exp[a^2 \|Z\|_H^2] < \infty \text{ pour } a \in]0, 6^{-1/2}[.$$

Si on appliquait aux données ainsi obtenues le théorème 2, il ne fournirait une densité D_λ de carré intégrable que pour $\lambda < 7^{-1/2}$.

Cet exemple montre donc que la chaîne des évaluations devrait être améliorée.

Références

- [1] X. FERNIQUE : Sur l'équivalence de certaines mesures produit. Probab. Theory Relat. Fields, 98, 77-90, 1994.
- [2] X. FERNIQUE : Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens, Les Publications C.R.M., 1997.
- [3] X. FERNIQUE : Extension du théorème de Cameron-Martin aux translations aléatoires I, à paraître.
- [4] M. LEDOUX, M. TALAGRAND : Probability in Banach spaces. Ergebnisse der Mathematik, série 3, vol. 23, Berlin-Heidelberg, New-York, Springer, 1991.
- [5] S.T. RACHEV, L. RÜSCHENDORF : Mass Transportation Problems. Probability and its Applications, Berlin-Heidelberg, New-York, Springer, 1998.

X. FERNIQUE, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.